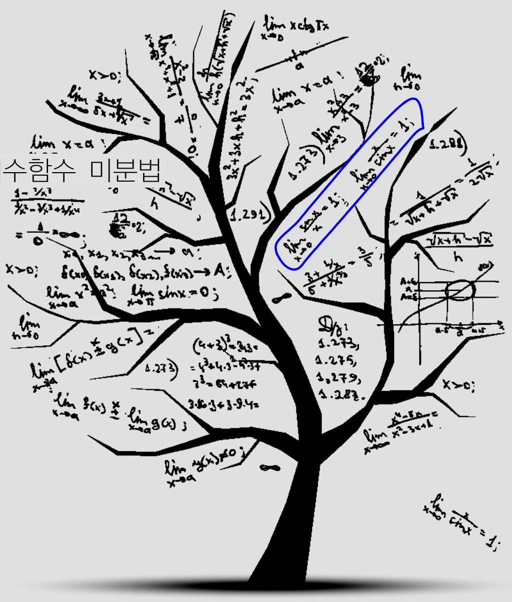
제2장

도함수



소득수준이 높아지면 소비가 증가하고, 자원의 투입량이 많아지면 생산량이 증가하며, 주문량이 많아지면 구매비용이 증가한다. 소득수준, 자원투입량, 그리고 주문량과 같은 독립변수의 변화와 이에 따른 소비, 생산량, 그리고 구매비용과 같은 종속변수의 변화에 대한 관계를 이해하는 것은 경영학, 경제학, 그리고 산업공학에서 여러 가지 현상을 이해하고 분석하는 데 필수적으로 요구된다. 도함수는 이와 같이 독립변수의 변화에 따른 종속변수의 변화에 대한 개념을 체계화한 것으로 경영학, 산업공학, 경제학뿐만 아니라 공학이나 물리학 등 다양한 학문분야에 적용된다.

1. 정의

함수 $y=f(x)$에서 변수 x를 독립변수, 주어진 독립변수 x에 의하여 오직 하나의 값으로 대응되는 y를 종속변수라 한다. 그러므로 변수 x에 대응하는 유일한 값 y를 $f(x)$로 표현하며 이를 x에 대한 f의 함수값이라 한다. 함수 $y=f(x)$에서 변수 x의 변화에 대하여 함수 y가 어떻게 변화하는가는 매우 중요하다. 생산량이 증가하면 비용이 증가하고 판매량이 증가하면 수익이 증가한다. 만약 함수 $f(x)$가 임의의 두 수 a와 b에 대하여 $a<b$일 때 $f(a)<f(b)$이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가하였다고 하고, $f(a)>f(b)$이면 그 구간에서 감소하였다고 한다. 만약 함수 $f(x)$가 정의역 내의 모든 x에 대하여 증가하면 주어진 함수 $f(x)$는 증가함수(increasing function)라 하고 감소하면 감소함수(decreasing function)라 한다.

이와 같이 변수 x의 변화에 대하여 함수 y가 어떻게 변화하는가를 나타내는 개념이 평균변화율(average rate of increase)이다. 만약 변수 x가 x에서 $x+\triangle x$로 $\triangle x$만큼 증가하면 함수 $f(x)$는 $f(x)$에서 $f(x+\triangle x)$로 변화하여 $f(x+\triangle x)-f(x)$만큼 변화한다. 평균변화율은 변수 x의 변화 $\triangle x$에 대한 함수의 변화 $\triangle f(x)=f(x+\triangle x)-f(x)$의 비율로 정의되며 두 점 $(x,\ f(x))$와 $(x+\triangle x,\ f(x+\triangle x))$를 이어주는 직선의 기울기를 의미한다.

정의 $f(x)$의 평균변화율은 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\triangle f(x)}{\triangle x}=\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{(x+\triangle x)-x}=\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

예 변수 $x=-3,\ -2,\ -1$과 서로 대칭되는 점 $x=1,\ 2,\ 3$에서 함수 $y=f(x)=x^2$의 평균변화율을 구하고 서로 대칭되는 두 점에서 평균변화율의 절대값이 서로 다른 이유를 생각해보자.

변수 x의 변화 $\triangle x$에 대한 함수 $f(x)=x^2$의 평균변화율은 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\triangle f(x)}{\triangle x}=\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\frac{f(x+\triangle x)^2-x^2}{\triangle x}=2x+\triangle x$$

그러므로 변수 $x=-3,\ -2,\ -1$과 $x=1,\ 2,\ 3$에서의 평균변화율은 변수 x뿐만이 아니고 변수 x의 변화 $\triangle x$에도 영향을 받으므로 변수 x와 변수 x의 변화 $\triangle x$에 대하여 다음과 같이 정리된다.

$\triangle x \backslash x$	$2x+\triangle x$					
	−3	−2	−1	1	2	3
1	−5	−3	−1	3	5	7
0.1	−5.9	−3.9	−1.9	2.1	4.1	6.1
0.01	−5.99	−3.99	−1.99	2.01	4.01	6.01
0.001	−5.999	−3.999	−1.999	2.001	4.001	6.001

이제 서로 대칭되는 두 점에서 평균변화율의 절대값이 서로 다른 이유를 보자. 예를 들어 $x=-2$와 2이고 $\triangle x=0.1$이라 하자. 평균변화율은 $2x+\triangle x$이므로 $x=-2$에서 평균변화율은 $-4+0.1=-3.9$가 되고 $x=2$에서 평균변화율은 $4+0.1=4.1$이 된다. 이는 $x=-2$에서 x값이 증가할수록 함수 $f(x)=x^2$의 기울기는 아래로 완만해지나 $x=2$에서는 x가 증가할수록 함수 $f(x)=x^2$은 기울기가 위로 급해지기 때문이다. ■

예 함수 $f(x)=2x^2+5$일 때 주어진 함수의 평균변화율을 구해보자.

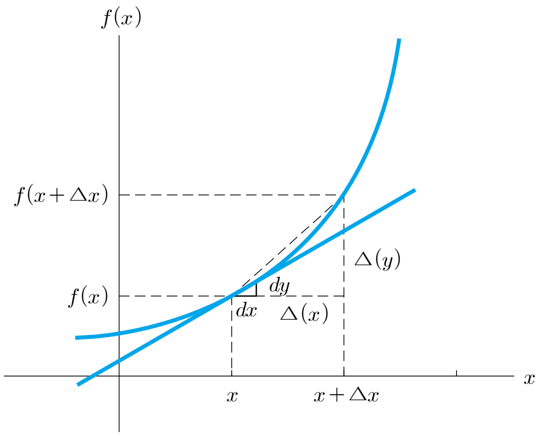
$$\frac{\triangle f(x)}{\triangle x}=\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\frac{(2x^2+4x\triangle x+2\triangle x^2+5)-(2x^2+5)}{(x+\triangle x)-x}$$

$$=\frac{4x\triangle x+2\triangle x^2}{\triangle x}=4x+2\triangle x$$ ■

그러므로 평균변화율은 변수 x와 변수 x의 변화 $\triangle x$에 따라 다양한 값을 갖는다. 그러므로 평균변화율을 적용하여 현상을 모형화하고 분석하기 위해서는 x와 $\triangle x$의 값에 대한 정보가 먼저 제공되어야 하며 이는 매우 번거롭고 불편한 일이다. 이러한 문제점에 대응하여 평균변화율 대신 적용하는 개념이 순간변화율(instantaneous rate of change)이다. 순간변화율은 평균변화율의 변수 x의 변화 $\triangle x$를 모두 0에 수렴시킨 것으로 $\triangle x$가 모두 0에 수렴하므로 변수 x에 대한 함수로만 표현된다. 함수 $y=f(x)$의 순간변화율을 함수로 표현한 것을 함수 $y=f(x)$의 도함수(derivative)라 하고 변수 $x=a$에서의 순간변화율을 변수 $x=a$에서의 미분계수(differential coefficient)라고 한다. 도함수는 y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $D_x y$ 등 다양하게 표현된다. 변수 $x=a$에서의 도함수 $f'(a)$는 점$(a, f(a))$에서 함수 $f(x)$의 접선(tangent line)의 기울기이다.

그림 2.1

평균변화율과 순간변화율



정의 함수 $f(x)$의 변수 x에 대한 도함수는 만약 극한값(limit)이 존재한다면 다음과 같이 정의된다. 극한값에 대해서는 다음 절에 논의한다.

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle f(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

예 도함수의 정의에 의하여 함수 $f(x)=x^2$의 도함수를 구해보자.

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{(x+\triangle x)^2-x^2}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}(2x+\triangle x)=2x$$

■

예 함수 $f(x)=2x^2+5$의 도함수를 구해보자.

$$f(x+\triangle x)=2x^2+4x\triangle x+2\triangle x^2+5$$

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{(2x^2+4x\triangle x+2\triangle x^2+5)-(2x^2+5)}{\triangle x}$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}(4x+2\triangle x)=4x$$

■

2. 극한값

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 변수 x의 변화 $\triangle x$가 0에 수렴할 때 평균변화율 $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$의 극한값으로 정의되었다. 그러므로 도함수의 개념을 이해하기 위해서는 먼저 극한값에 대한 이해가 필요하다.

변수 x가 a에 점점 가까이 갈 때 함수 $f(x)$의 값은 어떻게 변화하는지 아는 것은 매우 중요하다. 만약 변수 x가 a에 접근할 때 함수 $f(x)$의 값의 변화가 위나 아래로 매우 크다면 변수 x와 함수 $f(x)$ 사이에 일정한 관계를 설정하기 곤란하다. 그러나 변수 x가 a에 접근할 때 함수 $f(x)$가 특정한 값에 일정하게 수렴한다면 변수 x와 함수 $f(x)$ 사이에는 관계가 설정될 수 있다. 만약 x가 a에 접근할 때 함수 $f(x)$의 값이 특정한 값 L에 접근한다면 L을 함수 $f(x)$의 극한값이라 하며 다음과 같이 표현된다.

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

이는 아주 작은 값 $\epsilon(>0)$에 대하여 변수 x의 빠진 근방에서 함수 $f(x)$가 $L-\epsilon < f(x) < L+\epsilon$를 만족하여 함수 $f(x)$가 극한값 L로부터 ϵ의 범위 내의 값을 가짐을 의미한다.

여기에서 빠진 근방(deleted neighborhood)이란 $x=a$에 인접한 근방에서 점 $x=a$를 제외한 나머지 점들의 집합을 의미한다. 이는 극한값을 정의하는 데 변수 x가 a에 수렴할 때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이어야 할 필요는 없음을 의미하며 x가 a에 충분히 가까운 값을 가질 때 함수 $f(x)$도 극한값 L에 충분히 가까운 값을 가져야 함을 의미한다.

좀더 부연설명을 해보자. 변수 x는 a보다 큰 값에서 a에 접근할 수 있고 a보다 작은 값에서 a에 접근할 수 있다. a보다 큰 값에서 접근할 때 이를 우극한(right-side limit)이라 하고 $\lim_{x \to a^+} f(x)$로 표시하며 a보다 작은 값에서 접근할 때 이

를 좌극한(left-side limit)이라 하고 $\lim_{x \to a^-} f(x)$로 표시한다. 변수 x에 대하여 우극한과 좌극한이 같을 때만 극한값이 존재한다고 정의한다.

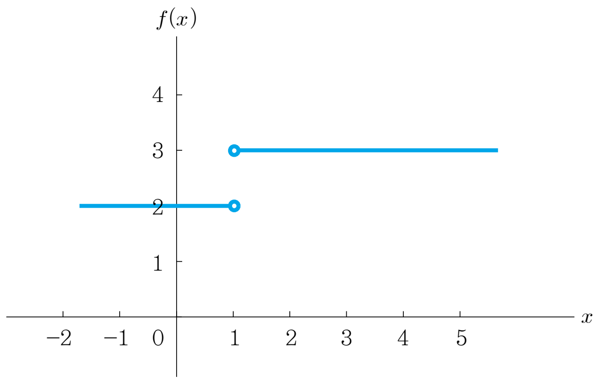
$$\lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

예 변수 $x=1$에서 다음 함수의 극한값을 구해보자.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$$

변수 x가 1보다 적은 값에서 1에 접근하면 $f(x)$는 2에 접근하지만 x가 1보다 큰 값에서 1에 접근하면 $f(x)$는 3에 접근하므로 극한값은 존재하지 않는다. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$. 그러므로 $\lim_{x \to 1} f(x)$는 존재하지 않는다.

그림 2.2



예 변수 $x=0$에서 다음 함수의 극한값을 구해보자.

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$. 그러므로 극한값 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$는 존재하지 않는다.

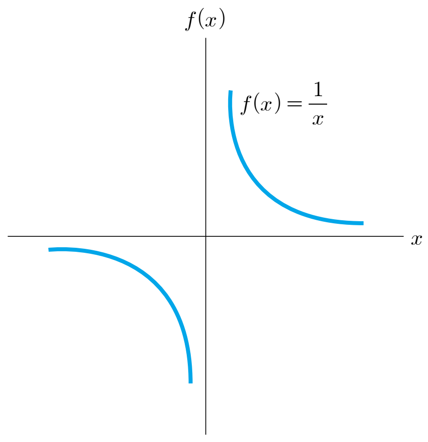


그림 2.3

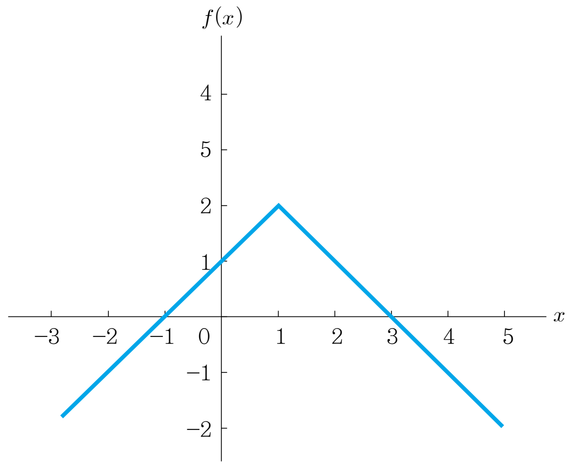
■

예 변수 $x=1$에서 다음 함수의 극한값을 구해보자.

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1 \\ -x+3, & x>1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$이고 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2$이므로 극한값이 존재하고 극한값 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$가 된다.

그림 2.4



예 변수 x가 무한대로 커질 때 다음의 극한값을 구해보자.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+3/x}{1-1/x}=1$$

변수 x가 무한대일 때 분자와 분모 모두 무한대이므로 분자와 분모를 x로 나누어준다.

정리 자연지수 e는 다음의 극한값으로 표현된다.

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

정리 함수 $f(x)$가 다항함수(polynomial function)이면 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$가 성립한다.