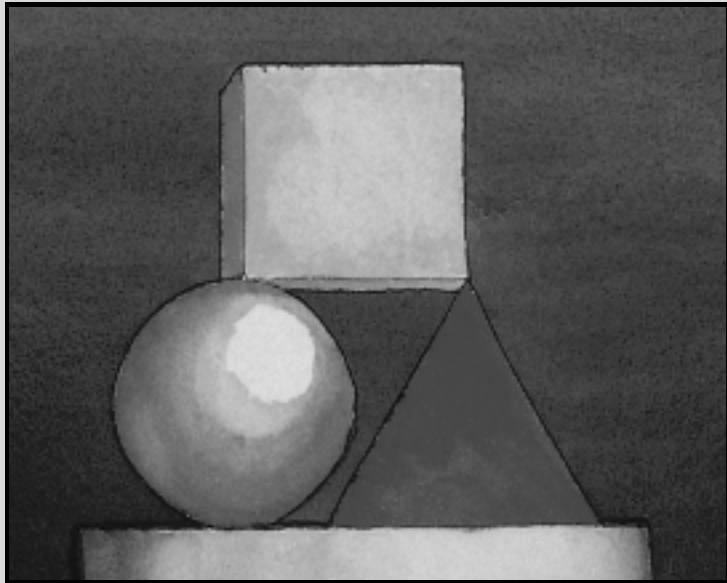




05

## 수학을 가르치는 효과적인 방법들



Mark K. Harniss / *University of Washington, Tacoma*

Douglas W. Carnine / *University of Oregon*

Jerry Silbert / *University of Oregon*

Robert C. Dixon / *J/P Associates*

미국수학교사협회(the National Council of Teachers of Mathematics)(NCTM, 2000)가 자신들이 새롭게 제안한 『학교 수학의 새로운 원칙과 기준』 문서 서문에서 다음과 같이 기록했듯이, “급변하는 오늘날의 세계에서 수학을 이해하고 수학을 할 줄 아는 사람은 자신의 미래를 구축해가는 데 매우 유리한 기회와 선택권을 갖게 될 것이다. 수학적 능력은 생산적 미래에 이르게 하는 관문이다. 수학적 능력의 부족은 그러한 문을 닫아 놓는 것과 같다”. 많은 학생들이 수학적 능력을 획득하지만 또 다른 많은 학생들은 그렇지 못하다. 가장 최근의 미국교육향상평가(National Assessment of Educational Progress)(National Center for Education Statistics, 2000a)는 지난 26년 동안 9세 응시자들은 13점, 13세 응시자는 10점, 그리고 17세 응시자는 4점이 각각 향상되어 왔다는 것을 보여준다. 수학 점수의 이러한 긍정적인 향상에 대해 Loveless와 Diperna(2000)은 “확실히 수학 성적이 최악으로 하향하고 있는 것은 아니다. 느리기는 하지만 지속적인 향상이 일어나고 있다. 하지만 그렇다고 이 향상이 국가적으로 축하할 만한 정도는 아니다”라고 지적했다. 이들의 조심스러운 결론은 『장기적인 결과 : NAEP 1999 장기경향 요약자료 표』(NCES, 2000b)에 기술되어 있듯이 미국 학생들과 여타 국가 학생들 간의 유의한 수행 격차(예컨대, 미국 학생들과 싱가포르 학생 간에는 1.5 표준편차의 차이가 있었다)로 확인되었다. 덧붙여, 가장 최근의 입수 가능한 요약 자료인 1966년 NAEP에서의 수행 수준(Reese, Miller, Mazzo, & Dossey, 1997)에 따르면, 모든 학생의 약 36%가 기본 수준(능숙한 수학 학습에 기본적인 선수 지식과 기능을 일부만 숙달한 상태) 이하의 수행을 보였고, 단지 21%만이 유능한 수준 혹은 그 이상의 수준(확고한 학업수행)을 보였다.

“모든 학생들이 중요한 수학을 깊이 있게 이해하면서 학습하는 데 필요한 기회와 지원을 받아야 한다”는 NCTM의 비전을 실현하기 위해 교사들은 교실에서 무엇을 해야 하는가? 이 질문에 대한 대답은 찾기 어려울 수도 있다. 많은 수학자들을 포함한 전통주의자(traditionalists)들은 기본으로 돌아갈 것을 요구한다. 다른 사람들은 우리가 기본 기술이라 부르는 것들이 이제 더 이상 수학에서 가장 중요하거나 수학과 가장 깊은 관련이 있다고 보지 않는다. 새로운 공학은 교사들로 하여금 학생들이 배워야 할 내용과 수학을 가르칠 때 사용하는 전략에 대해 다시 생각해 보도록 도전을 제시하고 있다. 학생 집단의 다양성의 증가로 이들 학생들의 차이를 조정하기 위해

좀더 많은 교수전략이 필요하게 되었다.

미국 내 각 주와 전문 기관들은 모든 학생들을 대상으로 복잡하고 높은 수준의 수행 기준들을 개발하고 이러한 기준들을 영향력이 큰 평가에 반영시키고 있다. 이러한 평가에서의 결과는 졸업과 유급 결정을 내리는 데 사용되고 있다. 사실, 교사들은 수학 지도 목표를 생각하면 움직이고 있는 표적을 대하고 있다는 것을 스스로 깨닫는다. 워싱턴 주의 공공수업장학사무국(the Office of the Superintendent of Public Instruction)이 지적했듯이 “성인으로서 정보를 잘 접하고 희망하는 직업을 갖기 위해서 오늘날의 학생들은 과거 학생들에게 필요했던 것을 넘어서는 수학교육을 필요로 한다”. 이러한 새로운 기대는 학생들에게 “당면한 문제를 인식하고 해결하기 위해 수학을 사용하면서 아울러 수학적 개념과 과정에 대한 깊은 이해, 완벽한 문제해결, 수학적 추론, 그리고 수학적 의사소통 능력을 갖추는 것을 요구한다”.

이렇게 다양한 쟁점에도 불구하고, 학생들이 갖추어야 할 다음과 같은 NCTM의 기준(2000)에서 보듯 수학 수업의 다양한 목표에 대한 실질적인 논쟁은 놀랍게도 거의 찾아볼 수 없다.

1. 수학을 가치롭게 여기는 것을 학습한다.
2. 수학 능력에 자신감을 갖는다.
3. 수학적 문제해결자가 된다.
4. 수학적으로 의사소통하는 법을 배운다.
5. 수학적으로 추론하는 것을 배운다.

덧붙여, 수학교육자들은 일반적으로 다양한 학습자들을 대상으로 한 수학지도 내용을 더 쉽게 만들거나 수준을 낮추지 말아야 한다는 것에 대해 동의한다. 오히려, 교육과정과 지도 기법을 다양화하여 이들 학생들도 수학적으로 생각하고 문제를 해결하고 추론할 수 있도록 해야 한다고 주장한다. NCTM(2000)은 자신들이 제시한 높은 기준을 충족하는 데 있어서 다양한 학습자들이 독특한 교육과정적 요구를 갖고

목표는 학생들이 생각하고, 문제를 해결하며, 추론할 수 있도록 교육과정과 수업 기법을 고안하는 것이다.

있다는 것을 다음과 같이 인정하고 있다.

교육적 평등이 이 기준의 핵심적인 요소이다. 모든 학생들은 그들의 개인적 특성, 배경, 혹은 신체적 여건에 상관없이, 수학을 공부하거나 혹은 수학을 학습하는 데 지원을 받을 기회를 가져야 한다. 평등은 모든 학생들이 동일한 수업을 받아야 함을 의미하지 않는다. 대신, 평등은 모든 학생들이 수학 교과를 접하고 수학을 학습하는 것을 촉진하기에 필요한 합리적이고 적절한 조정이 있어야 함을 의미한다.

하지만 보통의 학습자들과 특히 학습에 어려움을 갖고 있는 학생들이 어떻게 그러한 목표들을 가장 잘 달성할 수 있는지를 구체적으로 들여다보면 논쟁의 여지가 있다. 이 때에도 많은 논쟁들은 상대적으로 무엇을 더 중요시할 것인가에 관한 것들이다. Ma(1999)가 미국 학생들과 중국 학생들의 수학지식을 비교하면서 지적했듯이, 수학 수업시간에 학생과 교사가 하는 구체적인 활동들은 실제로 이루어지는 학습과 교사의 가르침에 비하면 훨씬 덜 중요하다. “전통 지향적인” 중국의 교실들이 실지로 의미 있는 성과들을 거두는 반면, “개혁 지향적인” 미국의 수학 교실들은 별로 눈에 띄는 결과를 내지 못할 수 있다. Ma는 다음과 같이 주장한다.

실제 교실에서의 수업에서는 두 가지 전통(개혁적 수업과 전통적 수업)이 서로 간에 분명하게 구분되지 않거나 혹은 알려진 바대로 그렇게 “순수하게” 어느 한 형태를 띠지는 않을 것이다. 예를 들어, 내 연구에 따르면(기본적인 수학을 심층적으로 이해하고 있는) 교사는 아무리 그들이 “개념적 학습”을 강조한다고 해도 “절차적 학습”의 역할을 절대 무시하지 않는다.

이 장에서는 다양한 수준 차이를 보이는 학습자들을 대상으로 한 수업을 향상시키기 위한 중요한 고려사항들을 기술하고자 한다. 이 사항들은 모든 교사들에게 그들이 스스로를 어떠한 수학적 지도 전통에 속해 있다고 하든지 간에 중요하다. 이 장에 제시된 예들의 많은 부분은 다양한 학습자들에 맞춰 설계된 수학 프로그램인 『수학개념 연결하기』(Engelmann, Carnine, Kelly, & Engelmann, 1994)에서 취했다. 다른 예들은 최근 미국과 중국의 수학교육자들의 지식기반을 비교한 Liping Ma(1999)의 책 『초등수학의 이해와 지도』에서 인용했다. 향상된 수업지도만으로는 다양한 학습자들의 요구가 제시하는 여러 가지 도전들을 모두 다 충족시킬 수 없다. 하지만 향상된 수업지

도의 공헌은 지대할 수 있으며, 어떠한 형식의 학교의 향상 노력에서든지 중심적인 역할을 할 수 있다. 이 장에서 제시하는 고려사항들은 평균과 평균 이상의 수행을 보이는 학생들의 학습에도 기여하지만, 특히 다양한 학습자들에게 중요하다. 첫 번째 고려사항인 큰 개념에 따라 내용 조직하기는 상위 수준의 학생을 포함하여 모든 학생들에게 특히 유효하다. 따라서, 이 장의 초점은 다양한 학습자들의 요구를 충족시키기 위한 수업을 개발하는 데 필요한 구체적인 지침을 제시하는 데 있다.



### 수학교수전략 향상을 위한 원리들

#### 큰 개념 중심의 교수설계

학생들로 하여금 세계적인 수준에 도달하도록 하는 교수도구들은 큰 개념들(근본적인 지식이나 근원적 의미)을 중심으로 조직되어야 한다. 왜냐하면, 이 개념들은 주요 조직 원리를 나타내고, 설명력과 예언력이 크며, 중요한 질문을 형성하도록 하고, 다양한 많은 상황과 맥락에 적용되기 때문이다. 수학교육과정 원칙을 논의하는 중에 NCTM 저자들은 지적하기를 “자리값, 등식, 비율, 함수, 그리고 교환의 비 등과 같은 기본적인 개념들은 수학교육과정에서 두드러진 위치를 점해야 한다. 왜냐하면, 이들 개념들은 학생들로 하여금 수학의 여러 다른 분야에서 여타 수학개념과 기타 관련된 개념들을 이해할 수 있도록 해주기 때문이다”.

이들 큰 개념 중 많은 것들은 언뜻 보기에는 별로 복잡하지 않거나 이해하기에 어렵지 않다. 어려운 점은 언제 이들 개념들을 적용하고 어떻게 이들 개념들의 적용이 시간에 따라 변화하는가를 아는 것이다. 학생들에게 수학적 능력을 부여하는 것은 이들 개념들이 서로 연결되어 있을 때이다. 예를 들어, 사칙연산(더하기, 빼기, 곱하기, 나누기)은 몇 개의 큰 개념들에 의존한다. 이 개념들에는 자리값/분배, 교환, 그리고 결합법칙/등식(그리고 10진법에서의 합성과 분해 같은 수 감각 등이 있다(Ma, 1999)). 이러한 큰 개념들은 사칙연산을 가르치고 배우는 과정에서 서로 연합된다. 교사와 학생이 명료하게 이들 개념들을 이해할 때, 이 개념들은 사칙연산을 이해하는 개념적 토대 역할을 한다. 표 5-1에 각 개념의 정의와 예가 나와 있다.

| 표 5-1 연산에서의 큰 개념들                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 큰 개념                                                                                                                                                                                                                      | 예                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p>자리값 : 우리 수 체계에서 어느 숫자가 일련의 수 계열에서 차지하고 있는 “자리”가 그 수에 대한 정보를 준다는 것을 이해하는 것</p>                                                                                                                                          | <p>265라는 숫자에서 첫째 숫자 2는 백의 자리이다. 우리는 2의 자리에 100 단위가 두 개 있다거나 혹은 100이 두 개라는 것을 안다. 비슷하게, 6의 자리는 10 단위가 6개 있다는 것을 말해준다.</p>                                                                                                                                                                                                                               |
| <p>확장된 표기 : 숫자를 각 자리값에 따라 표기할 수 있는 것</p>                                                                                                                                                                                  | <p>숫자 213은 두 개의 100, 한 개의 10, 그리고 3개의 1로 구성되어 있다. 이는 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다. <math>100+100+10+1+1=213</math>, 혹은 <math>200+10+3=213</math>.</p>                                                                                                                                                                                                           |
| <p>교환법칙 : 등식에서 숫자의 순서를 결과에 영향을 주지 않고 바꿀 수 있다.</p> <p><math>a + b = b + a</math></p>                                                                                                                                       | <p>덧셈과 곱셈은 교환법칙이 성립한다. 덧셈에서 <math>3+4=7</math>, 그리고 <math>4+3=7</math>. 곱셈에서 <math>4 \times 5=20</math>, 그리고 <math>5 \times 4=20</math>.</p> <p>뺄셈과 나눗셈에서는 교환법칙이 성립하지 않는다. 뺄셈에서 <math>5-3=2</math>이지만 <math>3-5=-2</math>이다. 나눗셈에서 <math>6 \div 3=2</math>이지만 <math>3 \div 6=0.5</math>이다.</p>                                                         |
| <p>결합법칙 : 등식에서 결과에 영향을 주지 않고서도 서로 다른 수를 결합할 수 있다.</p> <p><math>(a + b) + c = a + (b + c)</math></p>                                                                                                                       | <p>덧셈과 곱셈은 결합법칙이 성립한다. 덧셈에서 <math>(2+4)+5=11</math>이고 <math>2+(4+5)=11</math>이다. 곱셈에서 <math>(3 \times 2) \times 5=30</math>이고 <math>3 \times (2 \times 5)=30</math>이다.</p> <p>뺄셈과 나눗셈은 결합법칙이 성립하지 않는다. 뺄셈에서 <math>(15-3)-5=7</math>이지만 <math>15-(3-5)=13</math>이다. 나눗셈에서 <math>(32 \div 8) \div 2=2</math>이지만 <math>32 \div (8 \div 2)=8</math>이다.</p> |
| <p>배분법칙 : 곱셈을 포함하는 등식에서의 숫자는 배분될 수 있다.</p> <p><math>a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)</math></p> <p>나눗셈과 뺄셈 혹은 덧셈을 포함하는 등식에서도 숫자를 배분할 수 있다.</p> <p><math>(a + b) \div c = (a \div c) + (b \div c)</math></p> | <p><math>5 \times (3 + 2) = (5 \times 3) + (5 \times 2)</math></p> <p><math>(8 + 4) \div 2 = (8 \div 2) + (4 \div 2)</math></p>                                                                                                                                                                                                                        |
| <p>등식 : 등호 부호의 왼쪽 양과 오른쪽 항의 양은 같다.</p>                                                                                                                                                                                    | <p><math>32 + 15 = 47</math><br/> <math>16 + 16 + 15 = 47</math><br/> <math>8 + 8 + 8 + 8 + (5 \times 3) = 20 + 20 + 7</math></p> <p>주의 : 많은 학생들이 등호를 하나의 관계(예컨</p>                                                                                                                                                                                    |

| 표 5-1 (계속)                                                                   |                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 큰 개념                                                                         | 예                                                                                                                                                       |
|                                                                              | 대, 등호를 보면 한 쪽의 양이 다른 쪽의 양과 같다는 것을 안다)로 해석하기 보다는 조작(예컨대, 등호를 보면 더하거나 빼다 등)으로 해석한다.                                                                       |
| 숫자의 합성과 분해의 비(Ma, 1999) : 수 감각의 한 형태. 10진법에서 일단의 숫자를 합성 혹은 분해하는 비는 단순히 10이다. | 하나를 10개 모으면 하나의 10이 된다. 10개의 10을 모으면 100이 된다. 이 개념은 종종 결합(unitizing), 즉 10개의 하나에서 10단위를 만드는 것으로 불리운다. 비슷하게 10에서 하나를 빼면 9개의 1이 남는다. 즉, 이 때는 10을 분해한 것이다. |

표 5-1에 제시된 개념들이 함께 사용된다면 이는 학습자들이 사칙연산을 다룰 때 강력한 도구가 될 수 있다. 예를 들어, 학생들이 덧셈을 하면서 받아 올림이 필요한 수를 더하기 시작할 때 학생들은 높은 수를 구성하는 과정을 거치게 된다. 예컨대, 아래 문제에서 학생들은 몇 가지 개념을 이해해야 한다. 첫째, 학생들은 7과 9를 더할 때 10과 6으로 16을 구성할 수 있어야 한다. 자리값 개념을 이해한다면 학생들은 하나의 10이 일의 자리 6과 같은 자리에 올 수 없다는 것을 알게 될 것이다. 하나의 10은 십의 자리에 와야 한다. 교환법칙과 결합법칙을 이해한다면 학생들은 하나의 10과 3개의 10을 십의 자리에서 더할 수 있다는 것을 알게 될 것이다(즉,  $30+(7+9)=30+16$ . 그리고  $30+16=(30+10)+6$ ).

$$\begin{array}{r} 37 \\ +9 \\ \hline 46 \end{array}$$

뺄셈에서는 덧셈의 반대가 성립한다. 아래 등식에서 학습자들은 일의 자리 4에서 7을 뺄 수 없지만 34를 3개의 10과 4개의 일로 확장하고, 3개의 10중 하나의 10을 빼내서 4개의 일의 자리에 더할 수 있음을 알아야 한다(이상적으로는 결합법칙에 대한 이해가 있으면 좋다. 즉,  $(20+14)-7=34-7$ ). 그리고, 마지막으로 14에서 7을 빼면 7이 남는다는 것을 알아야 한다.

$$\begin{array}{r} 34 \\ -17 \\ \hline 17 \end{array}$$

이러한 개념은 학습자들이 여러 자릿수 곱셈에서 큰 수들을 곱할 때 흔히 학교 현장에서 지도되고 있는 빠른 계산법을 이해하는 데 가장 강력한 도움을 준다. 대개 학생들은 영문도 잘 이해하지 못한 채 교차해가며 수를 곱하라고 지도를 받았을 것이다. 사실, Ma(1999)의 연구에 따르면, 많은 미국 교사들은 왜 상호 곱하기 전략이 통하는지에 대해 이해하지 못했다. 하지만, 만약 학습자가 기본 개념만 이해하면 왜 상호 곱하기 전략을 사용하는지에 대한 대답은 단순하다. 첫째, 학습자들은 곱셈 문제와 이전에 덧셈과 뺄셈에서 풀었던 문제들의 차이점을 이해할 필요가 있다. 덧셈과 뺄셈의 경우에는 일단의 수를 다른 일단의 수에서 빼거나 혹은 두 일단의 수를 서로 묶는 과정을 포함하는 반면, 곱셈은 상위자릿수로 가면서 동일한 수 요소(곱해지는 수)들이 결합되는 일단의 수 조합이다.  $345 \times 32$  문제에서 학습자는 좀더 큰 수를 알아내기 위해 각각 32 요소를 동일하게 포함하고 있는 345개의 요소를 결합한다. 좀더 작은 수로는 각 요소에서 각 요소의 수를 더할 수 있다(예컨대,  $3 \times 4 = 12$ 는  $4+4+4$ 로 전환될 수 있다).

좀더 큰 수의 경우에 이러한 접근을 사용하면 금방 장황하고 힘들어져 버린다. 345의 각 수는 32를 포함하고 있기 때문에 학생은 더할 때처럼 단순히 일의 자리에 세로로 수를 곱할 수 없다. 그냥 위에서 아래로 곱하면 너무 적고 부정확한 답이 나올 것이다. 자리값과 확장된 표기를 이해하고 있으면 학생들은 이 문제가 3개의 10과 2개의 일이 있다는 것에 주목할 수 있을 것이다. 여기에 배분법칙을 알고 있으면  $(345 \times 2) + (345 \times 30)$ , 혹은 거꾸로  $(5 \times 2) + (40 \times 2) + (300 \times 2) + (5 \times 30) + (40 \times 30) + (300 \times 30)$

$$\begin{array}{r} 345 \\ \times 32 \\ \hline 10 \\ 80 \\ 600 \\ 150 \\ 1200 \\ +9000 \\ \hline 11040 \end{array}$$



과 같이 곱할 수 있을 것이다.

위 전략은 좀더 일반적으로 사용되는 곱셈 전략으로 이행하는 데 도움이 될 수 있다. 왜냐하면, 이 전략은 곱셈 알고리즘의 원리를 강조하기 때문이다. 이 전략은 받아올림의 필요성이 없음에 주목하기 바란다. 좀더 일반적으로 가르쳐지고 있는 알고리즘은 이러한 절차를 단순화시킨 것이다. 학생들은 결합법칙에 대한 이해를 적용하여 더하기 전에 곱셈 결과를 서로 묶을 수 있다.

$$\begin{array}{r} 345 \\ \times 32 \\ \hline 690 \\ +10350 \\ \hline 11040 \end{array}$$

나눗셈은 물론 곱셈의 역이다. 비록 나눗셈 문제들의 형식은 각기 다르지만 기본 큰 개념은 일관성 있게 적용된다. 학생들은 나눗셈이 큰 수를 동등한 크기의 작은 수로 나누거나(즉, 측정 나누기) 큰 수를 주어진 수 묶음으로 분리하는 것(부분적 나누기)이라는 것을 학습해야 한다(Stein, Silbert, & Carmine, 1997). 비록 단순한 여러 자릿수 나눗셈 문제를 해결하고자 할 때에도 학생들은 서로 다른 많은 수의 큰 개념들을 서로 통합해야 한다. 예를 들어, 아래 나눗셈 문제에서

$$\begin{array}{r} 508 \\ 9 \overline{)4572} \\ \underline{45} \phantom{00} \\ 0 \phantom{00} \\ \phantom{0} 72 \\ \underline{-72} \\ 0 \end{array}$$

배분법칙은  $(4500 \div 9) + (72 \div 9) = 508$ 이라는 것을 이해할 수 있도록 해준다. 학생들이 자리값을 이해하고 있다면 수를 적당한 자리에 배치하는 데 도움을 얻을 수 있을 것이다.

이 장에서 논의한 큰 개념들은 비록 자주 명확하게 가르쳐지지 않는지라도 그나마 잘 알려진 것들이다. 가끔 수학에서 큰 개념들이 전혀 분명하지 않는 경우가 있다.

예를 들어, 기하에서 학생들은 대개 7가지의 3차원 도형의 부피를 계산하기 위해 다음과 같은 7개의 공식을 학습할 것으로 기대된다.

- 직육면체 : 세로 × 가로 × 높이 = 부피
- 삼각기둥 :  $1/2 \times$  세로 × 가로 × 높이 = 부피
- 삼각뿔 :  $1/6 \times$  세로 × 가로 × 높이 = 부피
- 원기둥 : 파이 × 반지름 제곱 × 높이 = 부피
- 사각뿔 :  $1/3 \times$  세로 × 가로 × 높이 = 부피
- 원추 :  $1/3 \times$  파이 × 반지름 제곱 × 높이 = 부피
- 구 :  $4/3 \times$  파이 × 반지름 세제곱 = 부피

이러한 등식들은 큰 개념이라기보다는 공식들의 기계적인 적용을 강조한다. 큰 개

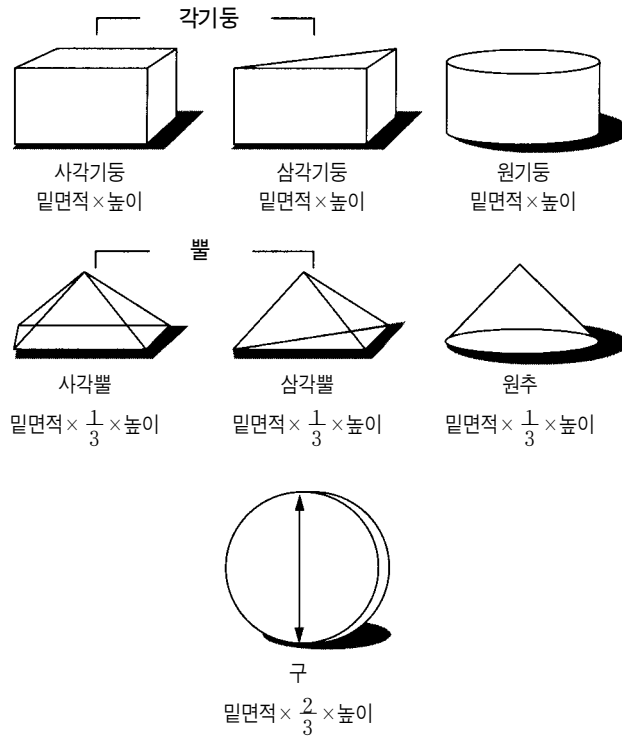


그림 5-1 부피는 밑면적에 높이를 곱한 것이라는 큰 개념의 예시

념에 근거하여 분석해보면, 학생들이 배워야 할 공식들의 수는 7개에서 약간씩 다른 하나의 공식, 즉 밑면의 넓이 곱하기 높이로 줄어들게 된다. 이러한 접근은 이해를 심화시키면서 동시에 학습하고, 기억하며, 적용해야 할 내용의 수를 감소시킨다(그림 5-1을 보라).

그림 5-1에서 보통의 모양- 직육면체, 삼각기둥, 그리고 원기둥-에서 부피는 밑면의 넓이 곱하기 높이이다. 뿔 모양의 경우-사각뿔, 삼각뿔, 그리고 원추- 부피는 밑면의 넓이에 높이를 곱한 것이 아니고 여기에  $1/3$ 을 곱한 것이다. 구는 특별한 경우이다. 밑면의 넓이에다 높이의  $2/3$ 를 곱한 것이다. 이 경우 밑면은 구의 중심을 지나 는 원의 면적이고 높이는 지름이다. 이렇게 근본적인 의미를 분석하면 부피가 밑면의 넓이에 높이의 얼마를 곱하는 함수라는 것을 이해하게 된다. Gelman(1986)이 지적했듯이 “일단의 원리들의 서로 다른 알고리즘적 사례에 초점을 기울임으로써 아동들에게 일견 매우 다르게 보이는 절차라도 동일한 수학적 기반, 그리고 그에 따른 근원적 의미를 공유할 수 있다는 것을 가르치는 데 도움이 된다”.

### 명시적 전략의 설계

학생들이 여러 개념을 어떤 방식으로든 조화시킬 때에는 모종의 전략을 구사하고 있는 셈이다. 지식을 획득하고 사용할 수 있도록 해주는 다소 정형화된 과정은 어떤 것이나 하나의 전략으로 볼 수 있다(Prawat, 1989). 전략의 궁극적 목적은 유의미한 적용이지만, 다양한 학습자들에게 있어서는 초기 수업에서 전략의 유의미한 적용보다는 명백하게 전략 그 자체에 초점을 기울이는 것이 전략 획득을 가장 확실하게 해 준다.

예를 들어, 5학년 학생들에게 제시된 다음 문제를 생각해보자.

점심시간에 각 학생들은 흰 우유 팩이나 초코 우유 팩을 선택할 수 있다. 전체 학교 학생에게 흰 우유 팩과 초코 우유 팩이 각각 얼마나 필요할지 추정하여라.

이러한 문제를 성공적으로 해결하기 위해서는 계산능력과 함께, 다양한 실제 수학 문제와 관련된 자료수집, 비율, 그리고 확률 등에 관해 잘 개발된 전략을 갖고 있어야 한다.

모든 전략들이 다 잘 개발되는 것은 아니다. 어떤 전략들은 너무 구체적이고 적용 범위가 좁아 특정한 문제나 혹은 아주 적은 수의 매우 유사한 문제해결을 위한 단순한 절차에 지나지 않는다. 예를 들어, McDaniel과 Schlager(1990)의 물 향아리 문제해결 연구에서, 한 수업 조건에서 학습한 학생들은 각기 다른 크기의 물 향아리에서 물을 더하고 제거하기 위해 하나의 단순한 공식(+1-2+1)만을 배웠다. 이 공식은 짐작할 수 있듯이 다른 물 향아리 문제에 잘 전이되지 않았다.

너무나 자주, 수학적 지식은 단순 지식처럼 보인다. Davis(1990)는 “전통적인 학교 수업방식”이 교사가 말한 것이나 시범 보인 것을 단순히 되새길 수 있는 능력을 주로 검사해 왔다고 지적했다. 두 가지 중요한 문제가 Davis가 기술한 전통적인 학교 수업 방식을 저해해 왔다. 첫째, 전통적 수업방식은 자주 조그만 개념들 - 예컨대,  $x/a = b/c$  와 같은 문제를 해결하기 위해 상호 곱하는 것과 같은 임의적인 절차 - 에 집중되었다. 둘째, 이러한 절차들은 자주 단순회상을 위한 “반복재생”으로서, 학생들이 이들 근처에 있는 중요한 수학적 원리들을 추론할 수 있는 가능성 자체를 효과적으로 없애 버리는 역할을 했다.

다른 한편으로는, 전략이 너무 일반적이어서 아주 일반적인 지침과 별 다를 바가 없는 경우가 있다. 그러한 전략들은 없는 것보다는 나을지 모르지만 대부분의 학생들이 대부분의 문제를 해결하도록 믿을 만하게 이끌지 못한다. 예를 들어, 그림을 그리거나, 읽고, 분석하고, 계획하고, 문제를 해결하라는 전략은 대다수의 학생들에게는 앞에서 인용했던 우유 주문 문제와 같이 복잡한 문제를 해결하도록 하는 데 도움을 주기에는 너무 일반적이다.

전략 교수의 중요한 목표는 가르친 전략이 여하튼 좋도록 하는 것이다. 어떤 학생들은 너무 협소하거나 너무 일반적인 전략을 개발하는 반면, 다른 학생들은 적절한 전략을 개발한다. 전략 지도의 주요 도전사항 - 아마도 유일한 도전사항 - 은 다양한 학습자를 포함하여 이들뿐 아니라 스스로는 전략을 개발하지 못하는 여타 학생들에게 가르칠 적절한 전략을 개발하는 것이다.

Prawat(1989)는 선행연구를 철저하게 검토한 결과에 근거하여 효율적인 전략 교수는 일반성 측면에서 중간수준이어야 한다고 권고했다. 즉, 효율적인 전략들은 적용범위가 너무 협소하지만 성공적으로 가르치기는 비교적 쉬운 것과, 적용범위가 넓기는

하지만 반드시 일관성이 있거나 가르치기가 쉬운 것만은 아닌 것 사이의 중간에 위치한다. 이는 좋은 이론이 그러하듯 좋은 전략 절약성의 법칙(Low of Parsimony)에 따른다는 것을 시사한다. “가장 단순한 방식으로 가장 많은 것을 설명하는 이론이 최고의 이론이다”(Mouly, 1978). 전략 평가에 구체적으로 적용되었을 때, 절약성의 법칙은 다음과 같을 것이다. 최고의 전략은 가장 많은 학생들로 하여금 가능한 가장 적은 수의 전략적 단계를 적용하여 가장 많은 수의 문제를 성공적으로 해결하거나 가장 넓은 범위의 과제들을 성공적으로 완수하도록 하는 것이다.

전문가들이 지식을 획득하거나 사용하기 위해 전략을 사용할 때 우리는 오직 결과만 알 수 있다. 이들이 밟아가는 전략의 각 단계들은 밖으로 드러나지 않는다. 교수전략을 개발하는 유일한 목적은 전문가들의 이러한 은밀한 인지적 과정을 명시화해서 비전문가 학습자들에게 그 과정을 드러내보이는 것이다. 명시적 전략을 분명하게 가르치는 것이 효과적이라는 연구는 매우 많다(Carnine & Stein, 1981; Charles, 1980; Gleason, Carnine, & Boriero, 1990; Leinhardt, 1987; Resnick, Cauzinille-Marmeche, & Mathieu, 1987; Resnick & Omanson, 1987).

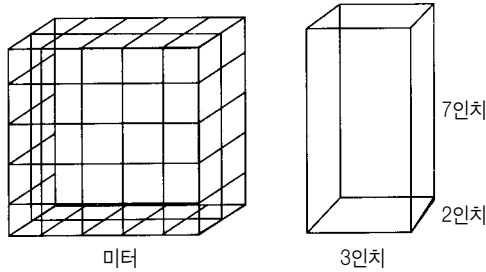
부피 공식에 관한 명시적 전략의 예는 다음과 같다. 첫 번째 단계는 학생들이 그림에서 작은 정육면체를 셈으로써 이들로 하여금 부피에 관해 좀더 구체적인 표상을 하도록 촉진한다는 것에 주목하라. 제2단계에서 전략을 소개한다. 제3단계에서 교사는 학생을 지원하지 않는다. 왜냐하면 학생들이 이미 직사각형의 면적을 계산하는 방법을 배웠기 때문이다. 반대로, 제4단계는 새로운 계산을 필요로 하기 때문에 더욱 교사중심적이어야 한다.

1. 선행지식과의 연결 : “상자 A를 짚으세요. 여러분은 이 상자의 부피를 어떻게 구하는지 알고 있어요. 작은 정육면체를 세어 그 부피를 적으세요. 답을 뭐라 썼나요? 그래요. 50입방미터예요.”
2. 새로운 전략 소개 : “상자 B를 짚으세요. 여러분은 밑면의 면적에다 높이를 곱하는 방식으로 부피를 계산하는 방법을 배우게 될 것입니다.”
3. 밑면의 넓이 계산 : “먼저 상자 B의 밑면 넓이를 계산하세요.”
4. 부피 계산 : “상자의 부피를 알기 위해서 여러분은 밑면의 넓이에 높이를 곱하면

됩니다. 여러분이 곱해야 할 두 수는 무엇무엇입니까? 그래요  $6 \times 7$ 입니다.”

5. 정답 쓰기 : “적절한 단위와 함께 정답을 적으세요. 답이 무엇인가요? 예, 42입방 인치입니다.”

- a. 정육면체 수를 센다.
- b. 밑면의 면적에다 높이를 곱한다.



부피에 관한 위와 같은 큰 개념을 하나의 단일 전략을 다양화하여 3차원의 여러 모양들에 적용할 수 있다는 점은 분명하다. 하지만, 어떻게 하나의 큰 개념의 전략을 다양화하여 다음 6개의 문제에 적용할 수 있을지는 분명하지 않다.

1. 음료재료 5개의 꾸러미로 음료 4갤론을 만들 수 있다. 음료재료 15개의 꾸러미로는 음료를 몇 갤론이나 만들 수 있겠는가?
2. 한 시간에 120마일로 달리는 기차가 파리까지 480마일을 가는 데에는 얼마의 시간이 걸리겠는가?
3. 9시간에 450마일을 달리는 차의 평균 속력은 얼마인가?
4. 8킬로그램은 몇 파운드인가?
5. 저장고에서 보내진 기름을 44개의 탱크에 가득 채웠다. 총 50개의 빈 탱크가 있었다면 가득찬 탱크의 비율은 얼마인가?
6. 판 위에 52장의 카드가 있다. 그중 13장은 하트이다. 나머지는 하트가 아니다. 여러분이 하트를 26장 가질 때까지 카드를 뽑았다가 다시 놓는 시도를 해야 한다면 총 몇 번의 시도가 필요할 것으로 기대하는가?

하지만, 큰 개념에 기반한 전략이 가장 유용한 경우는 이처럼 서로 관련이 없어

보이는 문제 유형들이다. 특히, 대개 그러한 관련성을 파악하지 못하는 학습자들에게 유용하다. 위의 서로 다른 6개 문제 유형들을 연결시키는 큰 개념은 비율(proportions)이다. 비율을 가르치기 위한 전략은 동일한 큰 개념이 이들 각기 다른 문제들에 동일하게 적용된다는 것을 분명하게 보여주기 위해서 각 문제 유형별로 체계적으로 적용되어야 한다. 비율의 적용은 첫 번째 문제에서 가장 두드러진다.

음료재료 5개의 꾸러미로 음료 4갤론을 만들 수 있다. 음료재료 15개의 꾸러미로는 음료를 몇 갤론이나 만들 수 있겠는가?

중간수준의 비율 전략은 먼저 학생들로 하여금 아래와 같이 단위를 나타내보게 하는 것이다.

$$\frac{\text{꾸러미}}{\text{갤론}}$$

다음, 학생들은 관련 정보를 대입한다.

$$\frac{\text{꾸러미}}{\text{갤론}} \quad \frac{5}{4} = \frac{15}{\square}$$

마지막으로, 학생들은 빈칸에 들어갈 수를 계산한다 : 12갤론

속력 문제는 보통 비율 문제로 여겨지지 않는데, 역시 비율 전략을 사용하여 해결될 수 있다. 주목할 점은 속력 문제를 비율문제로 설정하기 위해 중요한 것은 비율에서 비가 단일 시간 단위 분의 거리 단위의 수라는 것을 깨닫는 것이다. 이 원리는 두 번째 문제해결에 적용된다.

한 시간에 120마일로 달리는 기차가 파리까지 480마일을 가는 데에는 얼마의 시간이 걸리겠는가?

먼저, 단위를 나타낸다. 시간당 마일(mph)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\text{마일 수}}{\text{시간}}$$

다음에, 관련 정보를 대입한다.

$$\frac{\text{마일 수}}{\text{시간}} \quad \frac{120}{1} = \frac{480}{\square}$$

마지막으로, 답을 계산한다 : 4시간

다음 속력 문제에서 학생들은 평균 속력을 구한다.

9시간에 450마일을 달리는 차의 평균 속력은 얼마인가?

먼저, 단위를 아래와 같이 나타낸다.

$$\frac{\text{마일 수}}{\text{시간}}$$

해당되는 수를 대입한다.

$$\frac{\text{마일 수}}{\text{시간}} \quad \frac{\square}{1} = \frac{450}{9}$$

답을 계산하면, 시간당 50마일이 나온다.

또 다른 비율 적용 사례는 측정 동등성에서 찾을 수 있다. 이 문제 유형에서 중요한 것은 동등성에 포함된 두 단위 사이의 비를 설정하는 것이다.

8킬로그램은 몇 파운드인가?

단위를 나타낸다.

$$\frac{\text{파운드 수}}{\text{킬로그램}}$$



해당되는 수를 대입한다.

$$\frac{\text{파운드 수}}{\text{킬로그램}} \frac{2.2}{1} = \frac{\square}{8}$$

답을 구하면 17.6파운드이다.

이와 유사하게 백분율 문제도 비율 문제로 설정할 수 있다. 백분율의 경우, 이를 비율로 다루는 데 있어서 중요한 것은 두 번째 비를 퍼센테이지를 말하는 것으로 여기고, 대개 명시적으로 표현되지 않는 백분율 비의 분모는 100이라는 점을 지적하는 것이다.

저장고에서 보내진 기름을 44개의 탱크에 가득 채웠다. 총 50개의 빈 탱크가 있었다면 가득 찬 탱크의 비율은 얼마인가?

단위를 아래와 같이 표시한다.

$$\frac{\text{채워진 탱크 수}}{\text{전체 탱크 수}}$$

관련 수를 대입한다.

$$\frac{\text{채워진 탱크 수}}{\text{전체 탱크 수}} \frac{44}{55} = \frac{\square}{100} \text{ 퍼센트}$$

정답을 계산하면 88퍼센트가 된다.

아래와 같은 좀더 어려운 백분율 문제에 대해서는 비율전략을 사용하여 심지어 학습장애 학생들도 문제를 쉽게 다룰 수 있다.

저장고에서 보내진 기름을 44개의 탱크에 가득 채웠다. 현재까지 저장고 전체 기름의 88%가 탱크로 보내졌다. 남은 기름을 모두 보내면 모두 몇 개의 탱크에 기름이 차게 될까?

먼저, 단위를 아래와 같이 표시한다.

$$\frac{\text{채워진 탱크 수}}{\text{전체 탱크 수}}$$

관련 수를 대입한다.

$$\frac{\text{채워진 탱크 수}}{\text{전체 탱크 수}} = \frac{44}{\square} = \frac{88}{100} \quad \text{퍼센트}$$

정답을 계산하면 50개의 탱크가 된다.

경우의 수와 확률을 설명하는 다음 유형의 문제 역시 비율문제로 해결할 열쇠가 있다. 하나의 수를 다른 수 혹은 전체 수에 대한 비로 설정한다. 다음 예에서 이기는 시도의 한 유형은 전체 시도 횟수와 관련되어 있다.

판 위에 52장의 카드가 있다. 그중 13장은 하트이다. 나머지는 하트가 아니다. 여러분이 하트를 26장 가질 때까지 카드를 뽑았다가 다시 놓는 시도를 해야 한다면 총 몇 번의 시도가 필요할 것으로 기대하는가?

단위를 아래와 같이 표시한다.

$$\frac{\text{하트의 수}}{\text{시도 횟수}}$$

관련 수를 대입한다.

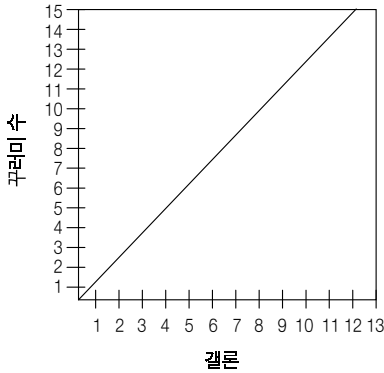
$$\frac{\text{하트의 수}}{\text{시도 횟수}} = \frac{13}{52} = \frac{26}{\square}$$

정답은 104번이 된다.

비율과 관련하여 이어서 소개할 것은 좌표 체계이다. 비율은 간단한 비율 문제-비, 측정 동등성, 백분율, 그리고 확률-를 좌표 시스템과 연결시킬 수 있다. 이 연결

음료재료 5개의 꾸러미로 음료 4갤론을 만들 수 있다. 음료재료 15개의 꾸러미로는 음료를 몇 갤론이나 만들 수 있겠는가?

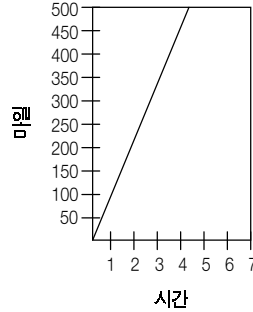
$$\frac{\text{꾸러미}}{\text{갤론}} = \frac{5}{4} = \frac{15}{\square}$$



|     |     |    |     |     |     |     |
|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|
| 꾸러미 | p   | 1  | 2   | 3   | 4   | 5   |
| 갤론  | 8×p | .8 | 1.6 | 2.4 | 3.2 | 4.0 |

한 시간에 120마일로 달리는 기차가 파리까지 480마일을 가는 데에는 얼마의 시간이 걸리겠는가?

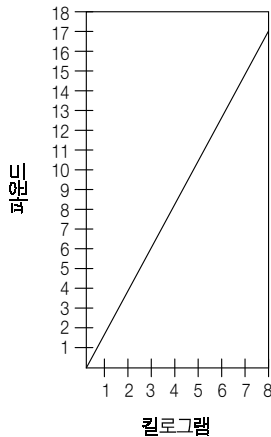
$$\frac{\text{마일}}{\text{시간}} = \frac{120}{1} = \frac{480}{\square}$$



|    |       |     |     |     |     |
|----|-------|-----|-----|-----|-----|
| 마일 | 120×h | 120 | 240 | 360 | 480 |
| 시간 | h     | 1   | 2   | 3   | 4   |

8킬로그램은 몇 파운드인가?

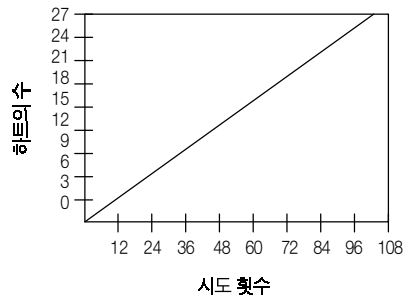
$$\frac{\text{파운드}}{\text{킬로그램}} = \frac{2.2}{1} = \frac{\square}{8}$$



|      |       |     |     |     |     |    |
|------|-------|-----|-----|-----|-----|----|
| 파운드  | 2.2×k | 2.2 | 4.4 | 6.6 | 8.8 | 11 |
| 킬로그램 | k     | 1   | 2   | 3   | 4   | 5  |

판 위에 52장의 카드가 있다. 그중 13장은 하트이다. 나머지는 하트가 아니다. 여러분이 하트를 26장 가질 때까지 카드를 뽑았다가 다시 놓는 시도를 해야 한다면 총 몇 번의 시도가 필요할 것으로 기대하는가?

$$\frac{\text{하트의 수}}{\text{시도 횟수}} = \frac{13}{52} = \frac{26}{\square}$$



|       |     |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|-------|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 하트의 수 | h   | 3  | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27  |
| 시도 횟수 | 4×h | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 |

그림 5-2 다수의 개념을 좌표 체계에 연결시키기 위한 비율의 활용

은 그림 5-2의 각 문제 유형별 그래프에 잘 설명되어 있다. 함수의 개념 역시 그림 5-2에 잘 나타나 있다. 함수표가 그림의 각 그래프에 제시되어 있다.

마지막으로, 이전에 논했던 우유-주문 문제를 다시 살펴보도록 하자. 이 문제에서 학생들은 상위 수준의 비율 전략을 자료수집과 확률통계 전략과 통합한다(그림 5-3 참조). 학생들은 흰 우유에 대한 초코 우유의 비를 결정하고 전체 재학생 수를 알아내기 위해 자료수집 전략을 적용한다. 다음에, 학생들은 좀더 상위 수준의 비율 전략을 구사하여 관련 정보를 도식으로 나타낸다. 5학년 학생들의 경우, 자신이 속해 있는 학급이 선호하는 우유의 유형이 곧 전체 학교의 선호도를 나타낸다고 가정하는 것이 필요할 것이다. 이 경우, 통계와 확률의 표집 개념을 적용할 수 있다. 마지막으로,

| <p>단계 1 : 자료수집<br/>학생들은 학급 내 초코 우유와 흰 우유 선호도를 조사한다. 그리고 교무실에서 전체 재학생 수를 알아낸다.</p>                                        | <p>한 학급에 총 32명이 있는데, 이 중 22명은 초코 우유를, 나머지는 흰 우유를 선호한다. 학교 전체 학생 수는 479명이다.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                  |        |                                  |       |                                 |                                  |      |                                 |                      |    |                                 |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|--------|----------------------------------|-------|---------------------------------|----------------------------------|------|---------------------------------|----------------------|----|---------------------------------|-----|
| <p>단계 2 : 상위 수준의 비율<br/>상위 수준의 비율 전략을 적용하기 위해 단위 그림을 그리고 관련 정보를 대입한다.</p>                                                | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 10%;"></th> <th style="width: 40%; text-align: center;">5학년 학급</th> <th style="width: 50%; text-align: center;">학교 전체</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>초코 우유</td> <td style="text-align: center;"><input type="text" value="22"/></td> <td style="text-align: center;"><input type="text"/></td> </tr> <tr> <td>흰 우유</td> <td style="text-align: center;"><input type="text" value="10"/></td> <td style="text-align: center;"><input type="text"/></td> </tr> <tr> <td>전체</td> <td style="text-align: center;"><input type="text" value="32"/></td> <td style="text-align: center;">479</td> </tr> </tbody> </table> |                                  | 5학년 학급 | 학교 전체                            | 초코 우유 | <input type="text" value="22"/> | <input type="text"/>             | 흰 우유 | <input type="text" value="10"/> | <input type="text"/> | 전체 | <input type="text" value="32"/> | 479 |
|                                                                                                                          | 5학년 학급                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 학교 전체                            |        |                                  |       |                                 |                                  |      |                                 |                      |    |                                 |     |
| 초코 우유                                                                                                                    | <input type="text" value="22"/>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <input type="text"/>             |        |                                  |       |                                 |                                  |      |                                 |                      |    |                                 |     |
| 흰 우유                                                                                                                     | <input type="text" value="10"/>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <input type="text"/>             |        |                                  |       |                                 |                                  |      |                                 |                      |    |                                 |     |
| 전체                                                                                                                       | <input type="text" value="32"/>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 479                              |        |                                  |       |                                 |                                  |      |                                 |                      |    |                                 |     |
| <p>단계 3 : 확률과 통계<br/>학생들은 학교 전체 학생을 위해 사야 할 초코 우유 개수를 추정하기 위해 비율 문제를 해결한다.</p> $\frac{22}{32} = \frac{\boxed{329}}{479}$ | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr> <td style="width: 10%;">초코 우유</td> <td style="width: 40%; text-align: center;">22</td> <td style="width: 50%; text-align: center;"><input type="text" value="329"/></td> </tr> <tr> <td>흰 우유</td> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;"><input type="text"/></td> </tr> <tr> <td>전체</td> <td style="text-align: center;">32</td> <td style="text-align: center;">479</td> </tr> </tbody> </table>                                                                                                                                                                                                         | 초코 우유                            | 22     | <input type="text" value="329"/> | 흰 우유  | 10                              | <input type="text"/>             | 전체   | 32                              | 479                  |    |                                 |     |
| 초코 우유                                                                                                                    | 22                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <input type="text" value="329"/> |        |                                  |       |                                 |                                  |      |                                 |                      |    |                                 |     |
| 흰 우유                                                                                                                     | 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <input type="text"/>             |        |                                  |       |                                 |                                  |      |                                 |                      |    |                                 |     |
| 전체                                                                                                                       | 32                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 479                              |        |                                  |       |                                 |                                  |      |                                 |                      |    |                                 |     |
| <p>단계 4 : 빠진 곳 수 넣기<br/>빠진 부분에 들어갈 숫자에 대한 지식을 활용하여 흰 우유 숫자를 추정한다.</p> $479 - 329 = 150$                                  | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr> <td style="width: 10%;">초코 우유</td> <td style="width: 40%; text-align: center;">22</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">329</td> </tr> <tr> <td>흰 우유</td> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;"><input type="text" value="150"/></td> </tr> <tr> <td>전체</td> <td style="text-align: center;">32</td> <td style="text-align: center;">479</td> </tr> </tbody> </table>                                                                                                                                                                                                                          | 초코 우유                            | 22     | 329                              | 흰 우유  | 10                              | <input type="text" value="150"/> | 전체   | 32                              | 479                  |    |                                 |     |
| 초코 우유                                                                                                                    | 22                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 329                              |        |                                  |       |                                 |                                  |      |                                 |                      |    |                                 |     |
| 흰 우유                                                                                                                     | 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <input type="text" value="150"/> |        |                                  |       |                                 |                                  |      |                                 |                      |    |                                 |     |
| 전체                                                                                                                       | 32                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 479                              |        |                                  |       |                                 |                                  |      |                                 |                      |    |                                 |     |

**그림 5-3** 자료수집, 고등 비율, 그리고 확률-통계 전략

실제 활동에 능숙하게 되는 것이 실제 활동으로 시작하는 것보다 훨씬 중요하다.

흰 우유 상자 수를 구하기 위해 비어 있는 더해야 할 수(addends) 개념이 필요하다.

위의 우유 문제와 약간 다른 많은 예가 가능하지만, 모두 그림 5-3에 설명된 통합 전략이 적용될 수 있다. 그 중 하나의 약간 다른 예로는 전체 재학생 수 대신 평균적으로 출석하는 학생 수를 사용하는 것이다. 이는 주문했지만 낭비될 수 있는 우유를 줄일 수 있을 것이다. 또 다른 예로는 학생들이 자신들의 학급 선호도가 학교 전체의 선호도를 대표하지 않을 수 있을 것이라고 생각할 수 있다. 이 경우, 학생들은 다른 학급에서 자료를 수집하고, 문제를 해결하며, 그 결과를 비교하고, 서로 다른 표집을 근거로 한 해결책들의 차이에 대해서 토론을 할 수 있다. 마지막 다른 예로는 각 유형의 우유 과(過)-부족을 예측하기 위해 계산한 결과와 실제 주문된 우유 수를 비교할 수 있다.

우유-주문 문제와 그 변형 문제들은 NCTM의 목표-수학적 이해를 향상시키기 위해 같이 학습하고, 추측하고, 발명하는 활동을 하며, 수학적 개념들을 서로 연결짓기-들이, 큰 개념에 근거한 중간수준의 전략들을 명시적으로 가르침으로써 다양한 학습자들에게 어떻게 효과적으로 달성될 수 있는지를 보여준다. 학생들은 어떤 표집을 선정할 것인가를 논의하면서 수학에 대한 자신들의 이해를 서로 향상시키는 데 같이 몰두하게 된다. 전체 재학생과 평균 출석 학생 수 중에서 어느 자료를 사용하는 것이 더 장점이 있는지를 고려하는 과정에서 학생들은 추정하고 새로운 것을 고안해내는 과정을 거치게 된다. 또한, 자신의 다양한 전략에 대한 자신들의 이해를 서로 연결시키면서 학생들은 수학적 개념을 연결시키고, 문제를 해결하며, 수학을 광범위하게 적용하는 법을 명확히 학습하게 된다.

비율과 같은 큰 개념을 이러한 문제들을 해결하기 위해 하나의 전략의 유사 전략을 사용하여 적용하면 비율 자체에 대한 학생들의 이해뿐만 아니라, 비, 측정의 동등성, 백분율, 확률, 좌표 체계, 그리고 함수 등의 개념에 대한 이해까지 심화시킬 것이다. 이러한 이해를 심화시키는 가장 주요한 방법 중의 하나는 어떻게 다양한 개념들이 하나의 전략에 의해 서로 연결되는가를 학습하는 것이다. 다른 말로 하면, 비율에

대한 심층적인 이해는 이 전략을 많은 다양한 상황에 적용해 봄으로써 형성된다. 이러한 이유 때문에 이해와 유창성을 개발하는 데에는 어떤 전략을 적용하는 것이 처음에 그 전략의 의미를 어떻게 형성하느냐 하는 것보다 더 중요하다. 실제 활동에 능숙하게 되는 것이 실제 활동을 시작하는 것보다 훨씬 중요하다.

### 매개된 형성 설계

영국의 교육학자 A. J. Romiszowski는 전통적인 수학교수법을 “내가 칠판에 두 개를 해볼 테니 나머지는 너희들이 알아서 해라”라고 특징지었다. 이 접근에서 “내가 두 개를 하겠다”는 부분은 하나의 시범으로, 그리고 “나머지는 너희들이 해라”라는 부분은 즉각적인 검사로 생각할 수 있다. 경험으로부터 학습하는 것의 문제는 교훈이 너무 늦게 온다는 것이다. 전통적인 교수 모델에 대해서도 마찬가지로 이야기할 수 있을 것이다. 나머지 부분을 한 다음, 학생들은 맞았는지 틀렸는지부터 놓친 문제를 어떻게 해결할 수 있는지에 대한 자세한 설명까지 다양한 피드백을 받을 것이며, 심지어 성적까지 받는 경우까지 있을 것이다. 그러나 이 피드백은 너무 늦고, 성적은 너무 이르다.

형성은 학생들이 완전한 이해에 도달하고 교사가 해주지 않은 것을 성공적으로 할 수 있게끔 다양한 방식으로 지원을 받도록 하는 한 가지 수단이다. 학생들이 학습해 가는 과정에서 교사는 점점 지원의 많은 부분을 제거한다. 하지만, 어떤 경우에도 모든 지원을 일시에 제거하고 “나머지는 너희들이 혼자 해라”라고 말하지는 않는다. 예를 들어, 교사는 전략의 각 단계를 시범보이면서 처음에는 학생들에게 각 단계 후 피드백을 제공할 것이다. 높이가 5인치이고 반지름이 1.6인치인 원뿔 문제에서 형성을 받는 부피 전략의 각 단계는 다음과 같이 생각해볼 수 있다.

1. “도형의 부피 내는 공식을 써보시오.”

$$\text{학생} : B \times 1/3 \times h$$

2. “도형의 밑면적을 계산하시오.”

$$\text{학생} : 3.14 \times 1.6^2 = 8.04$$

3. “부피를 계산하시오.”

$$\text{학생} : 8.04 \times 1/3 \times 5 = 13.4$$

## 4. “적절한 단위를 붙여서 정답을 쓰시오.”

학생 : 13.4 세계곱(입방) 인치입니다.

이러한 수준의 형성은 충분히 유용할 만큼 구체적이면서도 모든 3차원 도형에 융통성 있게 적용될 수 있을 정도로 일반적이다. 이 지원이 융통적인지 아닌지를 확인하기 위한 한 가지 검사는 앞서 비율과 관련하여 설명한 것과 같이 서로 다르게 보이는 문제 유형에 이 전략이 얼마나 적용될 수 있는지 그 정도를 확인해보는 것이다. 이러한 융통성은 또한 학생들이 비율, 함수, 그리고 좌표 체계 등과 같이 서로 다른 다양한 큰 개념들이 어떻게 서로 연결되고 있는지를 이해하는 수단이기도 하다.

분명히, 형성의 핵심적인 부분은 학생들의 사전지식과 수업 수준이 지향하는 대상 과제를 정확히 결정하는 것이다. Vygotsky(1978)는 학생들의 인지적 능력이 교수활동이 요구하는 인지적 요구사항에 부합하는 상황을 기술하기 위해 근접발달영역(Zone of Proximal Development)이라는 용어를 사용한다. 교육적 전략을 학생들의 근접발달 영역과 조화를 이루도록 설계하는 것은 학생들이 교수로부터 효과를 얻고 교수활동이 학생들의 자존감을 향상시키도록 하는 데 있어서 매우 중요하다.

### 준비된 배경지식 설계

앞서 제시한 모든 비율 문제 예에서 하나의 전략이 여러 개의 개념에 적용되었었다. 비율 교수전략이 적용된 개념들 - 비, 백분율, 측정, 그리고 확률 - 은 사전에 소개된 것으로 가정하였다. 비슷하게, 비율 개념이 좌표 체계와 함수 같은 다른 큰 개념들과 연결되어 있을 때 이들 큰 개념들 역시 가르칠 필요가 있다. 그러한 사전지식이 없이 비율을 적용하는 것은 비율 교수전략, 전략이 적용될 개념들, 혹은 그 전략과 관련된 다른 큰 개념들에 대한 학생들의 이해를 거의 증가시키지 못하는, 맹목적인 단순 행위에 지나지 않는다. 마찬가지로, 부피 교수전략도 학생이 어떤 부분은 사전지식으로 이미 소유하고 있을 것으로 가정한다. 예컨대, 넓이 개념을 이미 알고 있거나 계산(예컨대, 수를 제공하고 여기에 원주율을 곱하는 등)을 어느 정도 잘 할 것으로 전제한다.

교사와 교육과정 개발자들은 중요한 배경지식은 사전에 준비될 필요가 있음을 인식해야 한다. 학생들에게 자신들이 무엇을 이미 알고 있고 언제 어떻게 이 사전지식

학생들은 아이디어는 항상 같지만 그것의 적용과 사용은 사칙 연산에 걸쳐 변한다는 것을 학습한다.

이 새로운 지식을 배우는 데 지원역할을 할 수 있는지를 알게 해야 한다. 기존 지식과 새로운 지식 간의 이러한 명시적 연결은 학생들로 하여금 풍부한 개념적 연결망으로 수학적 지식을 구성할 수 있도록 하는 데 매우 중요한 역할을 한다.

아마도 학생들에게 필요한 배경지식과 함께 그러한 지식을 연결시킬 수 있는 큰 개념들에 근거한 유연한 전략을 제공하는 것이 새로운 NCTM 기준이 제시하는 도전에 다양한 학습자들을 준비시키는 최선의 방법일 것이다. 교사의 교수활동은 학생들에게 수학적 적용의 다양한 범위를 유목적적으로 확실히 보여주어야 한다. 또한, 학생들에게 필요한 사전지식을 제공함으로써 이들이 그러한 적용 과정에 성공적으로 참여할 수 있도록 해야 한다.

### 전략적 통합의 설계

NCTM(2000)은 전략적 통합의 중요성에 대해 다음과 같이 지적했다.

각 개별 수업을 계획할 때 교사는 수학을 조직화해서 기본적인 아이디어가 하나의 통합된 전체를 형성할 수 있도록 해야 한다. 다양한 맥락에서 접하게 되는 큰 개념들은 그 과정에서 나타나는 용어, 정의, 표기, 개념들, 그리고 기능 등 중요한 요소들로 신중히 구성되어야 한다.

네 개의 조작(비, 측정 동등성, 백분율, 그리고 경우의 수와 확률) 밑바탕을 이루고 있는 큰 개념들에 대한 앞서 논의는, 중요한 개념들이 수학 각 영역에 걸쳐 어떻게 적용되는지를 학습할 때 중요한 아이디어가 어떻게 힘을 발휘하는지를 보여주는 하나의 좋은 예이다. 학생들은 아이디어는 항상 같지만 그것의 적용과 사용은 사칙 연산에 걸쳐 변한다는 것을 학습한다.

위와 같은 개념은 학생들이 전략을 학습하고 사용하는 데에도 그대로 적용된다. 학생들은 중요한 수학 전략들을 그것 자체로서 이해해야 할 뿐 아니라, 통합되고 상호 연결된 전략으로 나아갈 수 있도록 전략들 간의 관계도 역시 학습해야 한다(Nickerson,



1985; Prawat, 1989; Van Patten, Chao, & Reigeluth, 1986). 학생이 몇 개의 “좋은” 전략을 배우고서도 언제 그것들을 적용할지 모를 수 있다. 하지만, 개별 전략들에 관한 교수는 몇 개의 전략들이 서로 통합되고 연습도 피아제(1973)가 말한 대로 새로운 것을 이전 것에 동화시키거나 이전 것을 새로운 것에 맞추어 조절하는 방식으로 설계될 수 있다.

예를 들어, 다양한 학습자들이 새로운 문제를 성공적으로 해결할 기회를 가지려면 학습자들은 비율 전략과 같은 전략을 적용할 수 있어야 할 뿐 아니라 특정 전략을 언제 적용하지 말아야 할 것인지도 알아야 한다. 이해를 한다는 것은 언제 전략을 적용하고 언제 적용하지 말아야 할 것인지를 아는 것이다. 다양한 학습자들이 그러한 이해에 도달하도록 하기 위해서는 넓은 의미의 학문간 통합된 수업이 아닌 교과 내 통합된 수업이 필요하다. 수학 교과 내에서의 통합을 위한 수업은 비율 전략을 사용하여 설명할 수 있다. 아래 문제 A는 전형적인 비율 문제이다.

**문제 A.** 트럭 한 대로 주스 상자를 가게에 배달한다. 전체 주스의 2/7은 포도주스이다. 트럭 안에는 8400 상자의 주스가 실려 있다. 포도주스는 몇 상자인가?

단위를 다음과 같이 표시한다:  $\frac{\text{포도}}{\text{전체}}$

관련 숫자를 대입한다:  $\frac{\text{포도}}{\text{전체}} = \frac{2}{7} = \frac{\boxed{\phantom{0000}}}{8400}$

문제를 푼다: 2400상자

만약 학생들이 동일한 비율 전략을 문제 B 유형에 잘못 적용한다면 정답 역시 2400이 될 것이다.

**문제 B.** 트럭 한 대로 포도주스와 사과주스를 한 가게에 배달한다. 전체주스의 2/7는 포도주스이다. 이 트럭으로 8400상자의 사과주스를 배달하면 포도주스는 몇 상자나 배달하게 될까?

단위를 다음과 같이 표시한다 :  $\frac{\text{포도}}{\text{전체}}$

관련 숫자를 대입한다 :  $\frac{\text{포도}}{\text{전체}} = \frac{\text{비}}{\text{비}} = \frac{\text{주스 상자}}{\text{주스 상자}}$

$$\frac{\text{포도}}{\text{전체}} = \frac{2}{7} = \frac{2400}{8400}$$

문제를 푼다 : 2400상자

문제 B에서 답 2400은 물론 틀렸다. 왜냐하면 8400상자는 전체주스의 양이 아니고 사과주스의 양이기 때문이다.

전략적 통합을 이용한 수업에서는 학생들이 기본적인 비율 전략을 부적절하게 B 문제에 적용할 가능성이 적다. 왜냐하면 두 개의 요소(전체주스와 포도주스)뿐만 아니라 세 개의 요소(전체주스, 포도주스, 그리고 사과주스)를 다루는 위와 같이 보다 복잡한 문제를 다루기 위해 상위 수준의 비율 전략을 이미 가르쳤을 것이기 때문이다. 거꾸로, 세 개의 요소를 다룰 새로운 전략이 2개의 요소만 다루는 보다 단순한 전략에 동화되어야만 한다.

이러한 조절과 동화는 세 개의 요소를 다루는 상위 수준의 비율 전략을 통해서 성취된다. 이 전략이 그림 5-4에 제시되어 있다.

그림 5-4의 상위 수준의 비율 전략은 혼합과 할인 등을 포함하는 좀더 복잡한 수학 문제에 유연하게 적용될 수 있는, 본질적으로 중간수준의 전략이다. 다음은 상위 수준의 비율 전략을 할인 문제에 적용한 것을 보여준다.

셔츠를 세일하고 있다. 원래 가격에서 \$2를 할인했다. 판매하고 있는 가격은 \$18였다. 할인은 얼마인가?

|       | 달러                   | 백분율                  |
|-------|----------------------|----------------------|
| 판매 가격 | 18                   | <input type="text"/> |
| 할인 폭  | 2                    | <input type="text"/> |
| 원래 가격 | <input type="text"/> | 100                  |

트럭 한 대로 포도주스와 사과주스를 한 가게에 배달한다. 전체주스의 2/7는 포도주스이다. 이 트럭으로 8400상자의 사과주스를 배달하면 배달되는 포도주스는 모두 몇 상자일까?

|                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                   |   |                                   |    |                                |                      |    |                      |                      |    |   |                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|---|-----------------------------------|----|--------------------------------|----------------------|----|----------------------|----------------------|----|---|----------------------|
| <p>단계 1 :<br/>학생은 2개 단위가 아닌 3개 단위의 그림을 그린다.</p>                                                                                            | <table border="0"> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">비</td> <td style="text-align: center;">주스 상자</td> </tr> <tr> <td>포도</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;"><input type="text"/></td> </tr> <tr> <td>사과</td> <td style="text-align: center;"><input type="text"/></td> <td style="text-align: center;">8400</td> </tr> <tr> <td>전체</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;"><input type="text"/></td> </tr> </table> |                                   | 비 | 주스 상자                             | 포도 | 2                              | <input type="text"/> | 사과 | <input type="text"/> | 8400                 | 전체 | 7 | <input type="text"/> |
|                                                                                                                                            | 비                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 주스 상자                             |   |                                   |    |                                |                      |    |                      |                      |    |   |                      |
| 포도                                                                                                                                         | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <input type="text"/>              |   |                                   |    |                                |                      |    |                      |                      |    |   |                      |
| 사과                                                                                                                                         | <input type="text"/>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 8400                              |   |                                   |    |                                |                      |    |                      |                      |    |   |                      |
| 전체                                                                                                                                         | 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <input type="text"/>              |   |                                   |    |                                |                      |    |                      |                      |    |   |                      |
| <p>단계 2 :<br/>빈 칸의 답을 계산하기 위해 덧셈에서의 보간법 관련 지식을 사용한다.</p> <p style="text-align: center;"><math>7 - 2 = \boxed{5}</math></p>                 | <table border="0"> <tr> <td>포도</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;"><input type="text"/></td> </tr> <tr> <td>사과</td> <td style="text-align: center;"><input type="text"/></td> <td style="text-align: center;">8400</td> </tr> <tr> <td>전체</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;"><input type="text"/></td> </tr> </table>                                                                                                        | 포도                                | 2 | <input type="text"/>              | 사과 | <input type="text"/>           | 8400                 | 전체 | 7                    | <input type="text"/> |    |   |                      |
| 포도                                                                                                                                         | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <input type="text"/>              |   |                                   |    |                                |                      |    |                      |                      |    |   |                      |
| 사과                                                                                                                                         | <input type="text"/>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 8400                              |   |                                   |    |                                |                      |    |                      |                      |    |   |                      |
| 전체                                                                                                                                         | 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <input type="text"/>              |   |                                   |    |                                |                      |    |                      |                      |    |   |                      |
| <p>단계 3 :<br/>포도주스 상자 수를 계산하기 위해 비율 문제를 적고 푼다.</p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{2}{5} = \frac{\boxed{3360}}{8400}</math></p> | <table border="0"> <tr> <td>포도</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;"><input type="text" value="3360"/></td> </tr> <tr> <td>사과</td> <td style="text-align: center;"><input type="text" value="5"/></td> <td style="text-align: center;">8400</td> </tr> <tr> <td>전체</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;"><input type="text"/></td> </tr> </table>                                                                                 | 포도                                | 2 | <input type="text" value="3360"/> | 사과 | <input type="text" value="5"/> | 8400                 | 전체 | 7                    | <input type="text"/> |    |   |                      |
| 포도                                                                                                                                         | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <input type="text" value="3360"/> |   |                                   |    |                                |                      |    |                      |                      |    |   |                      |
| 사과                                                                                                                                         | <input type="text" value="5"/>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 8400                              |   |                                   |    |                                |                      |    |                      |                      |    |   |                      |
| 전체                                                                                                                                         | 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <input type="text"/>              |   |                                   |    |                                |                      |    |                      |                      |    |   |                      |

**그림 5-4** 상위 수준의 비율 전략

혼합 문제에 전략을 적용한 예가 그림 5-5에 설명되고 있다.

### 요령 있는 복습의 설계

복습이라는 용어는 교육 분야에서 끊임없이(그리고 아마도 아무 생각없이) 반복연습하는 것의 이미지를 떠올리게 하는 말로 생각될 수 있다. 하지만 선행연구들은 특정한 복습 방식(예컨대, 충분하고, 분산되어 있으며, 능가적이고, 다양한 복습)이 매우 효과적이라는 것을 강력히 뒷받침하고 있다. 복습은 배운 것을 벗어날 수 없다고 말할 수 있다. 즉, 수업의 질-주로 큰 개념과 전략 측면에서-이 복습의 가치에 영향을 미친다. “작은 개념들” 혹은 약간 중요한 재료들에 얼마나 많은 복습이 할당되었든지간에 그 개념들은 여전히 작고, 교육 재료들은 약간 중요한 채로 남아 있다. 이 점은 이 책의 앞 부분에서 논의된 바 있기 때문에 여기에서는 더 이상 자세히 다루지 않기로 한다.

**혼합문제**

혼합물에 땅콩과 아몬드가 4대 3 비율로 들어 있다. 만약 혼합물 전체 무게가 35파운드라면 여기에 들어간 아몬드의 무게는 얼마인가?

|                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                 |   |                                 |     |                                |                                 |     |                                |                      |    |                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|---|---------------------------------|-----|--------------------------------|---------------------------------|-----|--------------------------------|----------------------|----|----------------------|----|
| <p>단계 1 :<br/>학생은 2개 단위가 아닌 3개 단위의 그림을 그린다.</p>                                                                                      | <table border="0"> <tr> <td></td> <td>비</td> <td>파운드</td> </tr> <tr> <td>땅콩</td> <td>4</td> <td><input type="text"/></td> </tr> <tr> <td>아몬드</td> <td>3</td> <td><input type="text"/></td> </tr> <tr> <td>전체</td> <td><input type="text"/></td> <td>35</td> </tr> </table> |                                 | 비 | 파운드                             | 땅콩  | 4                              | <input type="text"/>            | 아몬드 | 3                              | <input type="text"/> | 전체 | <input type="text"/> | 35 |
|                                                                                                                                      | 비                                                                                                                                                                                                                                                                          | 파운드                             |   |                                 |     |                                |                                 |     |                                |                      |    |                      |    |
| 땅콩                                                                                                                                   | 4                                                                                                                                                                                                                                                                          | <input type="text"/>            |   |                                 |     |                                |                                 |     |                                |                      |    |                      |    |
| 아몬드                                                                                                                                  | 3                                                                                                                                                                                                                                                                          | <input type="text"/>            |   |                                 |     |                                |                                 |     |                                |                      |    |                      |    |
| 전체                                                                                                                                   | <input type="text"/>                                                                                                                                                                                                                                                       | 35                              |   |                                 |     |                                |                                 |     |                                |                      |    |                      |    |
| <p>단계 2 :<br/>빈 칸의 답을 계산하기 위해 덧셈에서의 보간법 관련 지식을 사용한다.</p> <p style="text-align: center;"><math>4 + 3 = \boxed{7}</math></p>           | <table border="0"> <tr> <td>땅콩</td> <td>4</td> <td><input type="text"/></td> </tr> <tr> <td>아몬드</td> <td>3</td> <td><input type="text"/></td> </tr> <tr> <td>전체</td> <td><input type="text" value="7"/></td> <td>35</td> </tr> </table>                                    | 땅콩                              | 4 | <input type="text"/>            | 아몬드 | 3                              | <input type="text"/>            | 전체  | <input type="text" value="7"/> | 35                   |    |                      |    |
| 땅콩                                                                                                                                   | 4                                                                                                                                                                                                                                                                          | <input type="text"/>            |   |                                 |     |                                |                                 |     |                                |                      |    |                      |    |
| 아몬드                                                                                                                                  | 3                                                                                                                                                                                                                                                                          | <input type="text"/>            |   |                                 |     |                                |                                 |     |                                |                      |    |                      |    |
| 전체                                                                                                                                   | <input type="text" value="7"/>                                                                                                                                                                                                                                             | 35                              |   |                                 |     |                                |                                 |     |                                |                      |    |                      |    |
| <p>단계 3 :<br/>아몬드 무게를 결정하기 위해 비율을 쓰고 문제를 푼다.</p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{3}{7} = \frac{\boxed{15}}{35}</math></p> | <table border="0"> <tr> <td>땅콩</td> <td>4</td> <td><input type="text" value="20"/></td> </tr> <tr> <td>아몬드</td> <td><input type="text" value="3"/></td> <td><input type="text" value="15"/></td> </tr> <tr> <td>전체</td> <td>7</td> <td>35</td> </tr> </table>              | 땅콩                              | 4 | <input type="text" value="20"/> | 아몬드 | <input type="text" value="3"/> | <input type="text" value="15"/> | 전체  | 7                              | 35                   |    |                      |    |
| 땅콩                                                                                                                                   | 4                                                                                                                                                                                                                                                                          | <input type="text" value="20"/> |   |                                 |     |                                |                                 |     |                                |                      |    |                      |    |
| 아몬드                                                                                                                                  | <input type="text" value="3"/>                                                                                                                                                                                                                                             | <input type="text" value="15"/> |   |                                 |     |                                |                                 |     |                                |                      |    |                      |    |
| 전체                                                                                                                                   | 7                                                                                                                                                                                                                                                                          | 35                              |   |                                 |     |                                |                                 |     |                                |                      |    |                      |    |

**그림 5-5** 혼합 문제에 적용된 상위 수준의 비율 전략

**교수설계 원리의 적용**

교사와 교수설계자들은 모두 학생들에게 수학을 가르치기 위한 도구들을 효과적인 교수 원리를 중심으로 잘 설계하도록 하는 데 역할을 담당한다. 교사들은 일차적으로 교수재료의 선정과 수정에 관여한다. 이 과정에서의 교사들의 선택과 보다 향상된 교수재료에 대한 이들 교사들의 요구와 수요가 이들 재료를 개발하는 사람들로 하여금 자신들이 산출하는 재료를 수정하고 더욱 발전시키도록 한다. 다음 절에서는 교수재료를 개발하고 선정하며 수정하는 데 필요한 제안들을 다룬다.

**교수도구 개발**

교수도구는 많은 수의 주제나 작은 개념들을 접하게 하는 데 대략 비슷한 자원을 투

입하기보다는 수학을 이해하는 데 중요한 큰 개념들을 가르치는 데 충분한 시간과 공간을 할당해야 한다. 그러한 큰 개념들로는 수 계열, 항등원칙, 비율, 부피와 면적, 어림 등을 들 수 있다. 이러한 도구들은 큰 개념들을 학습하도록 명시적 전략을 제공할 수 있도록 개발되어야 한다. 전략은 적용범위가 너무 좁으면 안 된다. 왜냐하면, 그럴 경우 기계적인 학습이 될 수 있기 때문이다. 그렇다고 흔히 볼 수 있는 문제해결 전략(예컨대, 그림을 그려라)같이 너무 적용범위가 넓어도 안 된다.

또래 교수 혹은 교수적 피드백과 같은 일부 형성은 교수도구에 들어 있을 필요가 없을 것이다. 대신, 교사의 전문성 개발 훈련 교재에 포함시킬 수는 있다. 하지만, 형성이 가미된 과제는 교수도구에 들어 있어야 한다. 그러한 과제들은 학생들로 하여금 적절한 속도로 이해를 할 수 있게 해주는 성과측정용 과제를 약간 의도적으로 변형시킨 것이다. 다음은 간단히 형성화된 과제의 예이다.

$$\underline{\hspace{2cm}} + 2/3 = ( \quad )/12 + ( \quad )/12 = ( \quad )/( \quad )$$

이러한 과제들은 학생들로 하여금 분수를 더하기 전에 분수 전환 전략을 사용하도록 안내한다.

서로 다르게 보이는 수학적 개념들을 서로 관련시키는 과제와 활동들을 통해 교수도구는 강력한 전략적 통합을 제공하는 역할을 한다. 예를 들어, 잘 설계된 도구는 비, 측정 동등성, 백분율, 확률, 좌표 체계, 그리고 함수 등을 포함하는 다양한 문제에 적용될 수 있는 비율 전략을 취할 것이다. 이러한 방식으로 개념적 지식을 통합하는 것의 주요 이점은 이것이 문제해결 이해를 심화시킨다는 점이다. 또한, 통합된 과제와 활동들은 학생들에게 혼란을 야기할 수 있는 수학 주제들과 관련해서도 유용하다.

교수도구 개발자들은 학생들이 프로그램에서 제시한 전략을 학습하는 데 필수적인 배경지식을 갖고 있는지를 결정할 평가도구를 만듦으로써 배경지식을 다루어야 한다. 그리고, 그러한 지식에 있어서 차이가 있는 학생들에게는 필수적인 배경지식을 가르쳐야 한다. 다양한 학습자들의 경우, 작년에 가르친 자료들의 내용이 올해 가르칠 전략의 필수적인 배경지식으로 온전히 보존되어 있을 것이라고 가정하는 것은 위험하다.

출판업자들은 교수도구에 풍부한 복습문제를 포함시킴으로써 교사들에게 많은 도

움을 준다. 왜냐하면, 교사들에게는 새로운 복습문제를 만드는 것보다 복습을 생략하는 것이 훨씬 쉽기 때문이다. 잘 분산되어 있는 복습문제를 포함하는 프로그램들은 그렇지 않은 프로그램보다 훨씬 효과적이다. 그리고 누가적 복습을 포함하고 있는 프로그램은 이전에 기술한 대로 전략적 통합을 촉진한다. 또한, 전이를 촉진하기 위해서는 복습이 다양해야 한다.

### 교수도구의 선정

교사들은 대부분의 시간이나 지면이 큰 개념들을 가르치는 데 할당되어 있는지를 알아보기 위해 수학 도구를 검토할 수 있다. 그리고 나서 교사들은 그러한 큰 개념들을 가르치기 위한 구체적 전략이 존재하는지 봐야 한다. 만약 구체적 전략이 있다면, 교사들은 이들 전략들이 일반적으로 일반성 측면에서 중간 정도인지를 물어봐야 한다. 교사들은 자신들이 이전에 배운 전략만을 사용하여 교수도구에 제시된 문제를 해결해야 하는 다양한 학습자로 상상해보아야 한다.

교사들은 전략과 관련된 시범이나 모델 과제와 학생들이 궁극적으로 혼자 해결해야 하는 과제 모두를 검토해봄으로써 교수도구 안에 형성화된 과제가 얼마나 들어 있는지를 평가할 수 있다. 교수도구 안에 학생들로 하여금 점진적으로 독립성과 이해에 이르게 하는 “중간수준”의 과제가 있는가?

교수도구가 중요한 개념들을 전략적으로 통합하고 있는지를 알아보기 위해서 교사들은 특히 일부 장이나 수업 단위가 “누가적 복습,” 혹은 “통합,” 혹은 “정리 통합” 등과 같이 설계되어 있는지를 살펴봄으로써 교수도구의 범위와 계열을 검토할 수 있다. 잘 설계된 교수도구 속에는 프로그램 안의 평가 내용에 평가 직전에 가르친 내용 뿐만 아니라, 이전에 배운 모든 주제들을 반영하는 과제가 들어 있는 것이다.

교수도구가 이전의 정보를 새로운 정보와 어떻게 관련시키고 있는지를 평가하는 한 가지 방법은 중요한 수학적 개념을 가르치기 위한 전략을 세부 요소로 분할해 보는 것이다. 그리고 난 다음, 새로운 전략을 소개하기 전 15일 정도의 수업을 검사하여 이들 요소들이 어떤 식으로 다루어지는지를 본다. 이상적으로는 요소들이 새로운 전략을 소개하기 몇 수업 전에 가르쳐져야 한다. 또한, 교수도구는 학생들의 배경지식에 중요한 차이가 있는지를 확인하기 위해 평가도구를 어느 정도 포함하고 있는지

하는 측면에서 검토되어야 한다. 덧붙여, 교사들은 교수도구의 각 부분 중 다단계 문장제 문제와 같이 특히 수학에서 어려운 주제 부분을 선정하여, 프로그램의 나머지 부분에서 복습이 충분하고, 잘 분산되어 있으며, 능가적이고 적절하게 다양한지를 검토함으로써, 교수도구가 충분한 복습을 제공하고 있는지를 알아볼 수 있다.

### 교수도구 수정

만약 교수도구를 수정해야 한다면 교사들은 기존의 도구에서 가장 중요한 수학 개념과 원리들을 확인하고 교수시간을 재 배정하여 이들 개념과 원리들을 철저히 가르칠 수 있도록 할 수 있다. 타당한 평가는 철저하게 가르칠 중요한 수학 개념들에 초점을 맞추어야 한다는 것에 주목해야 한다.

스스로 발견할 것으로 여겨졌던 이들 개념과 원리들에 어려움을 겪고 있는 학생들은 교사들이 그러한 개념과 원리 학습을 위한 명시적 전략을 개발함으로써 도울 수 있다.  $x/a = b/c$  공식에서  $x$ 를 구할 때 “뒤집어서 곱하라”와 같이 전략이 너무 적용범위가 광범위할 때는 그러한 전략이 작용하는 근본 원리를 충분히 그리고 분명하게 설명한다. 너무 많은 시간을 소비하지 않고서도 교사는 좀더 어려운 과제와 연관된 전략의 좀더 어려운 단계를 위해 힌트, 단서 혹은 촉진자 등을 제공함으로써 개별 연습과제를 형성화된 과제로 전환할 수 있다.

교사들은 또한 이전에 확인된 공통 혼란 사항들을 확인하고 그것들에 초점을 맞추어 추가 통합된 연습을 제공함으로써 교수도구의 효과성을 향상시킬 수 있다. 예를 들어, 교수도구가 이전에 가르친 혼합 문제에 관한 연습을 포함하지 않았으면, 교사들은 문제를 활용하거나 혹은 교수도구 내의 문제를 약간 수정하여 그러한 문제를 제공할 수 있다.

만약 교사가 학생들에게 전략을 소개하기 전에 중요한 전략들을 분석할 기회를 갖게 된다면 그 분석에 근거하여 중요한 필수적 배경지식을 제공할 수 있다. 예를 들어, 교사들은 부피 이해를 위한 전략을 가르치기 전에 면적 개념을 검토한 다음 면적과 밀면적을 서로 연결시킬 수 있다. 교사는 또한 학생들의 오류를 세밀히 검토하여 이들 오류가 주로 배경지식의 부족에서 기인한 것인지 여부를 확인해야 한다. 필요하다면, 교사는 중점적으로 (a) 많은 과제를 준비하여 장기간에 걸쳐 분산하고, (b) 복습

을 누가적으로 만듦으로써 복습의 분별성을 향상시키기 위해 프로그램을 수정할 수 있다. 하지만, 교사가 복습문제를 적절하게 다양하게 하기 위해 - 즉, 단순 반복 연습을 지양하고 그렇지만 자신들이 배운 전략의 한계를 벗어나 수행해야 할 정도로 다양하지는 않도록 - 프로그램을 수정하는 데에는 상당히 많은 시간이 소요될 수 있다.

## 요약

Ma(1999)가 지적했듯이 “제한된 교과지식은 학생들의 개념적 이해를 촉진시킬 수 있는 교사들의 능력을 제한한다. ‘이해를 위한 수학’에 강한 믿음을 갖고 있다고 해도 그러한 믿음이 교사의 교과지식을 보완하거나 대체할 수 없다”(p. 36). 교수도구는 교사들이 학생들의 개념적 이해를 개발할 수 있도록 개발되어야 한다. 교과지식에 대해 깊은 이해 없이 교사양성 프로그램을 수료한 교사들은 양질의 잘 설계된 교수재료가 제공하는 지원과 형성화를 필요로 한다.

이 장에서 제시한 수학의 교수설계 원리들은 학생들과 직접 부딪치고 있는 사람들과 수학교재를 개발하고 출판하는 사람들에게는 직접적인 중요성을 갖는다. 특히, 이들은 다음과 같은 수학 지도 도구를 개발하고 선택해야 한다.

- ▼ 큰 개념들은 적절한 내용의 광범위한 영역에 걸쳐 명시적으로 기술되어 있고 제시되어야 한다.
- ▼ 전략들은 중간 정도의 적용범위를 갖고, 명시적으로 기술되어야 하며, 다양한 문제 유형에 걸쳐 사용되어야 한다.
- ▼ 과제들은 학생들이 새로운 재료를 학습할 때 유연한 형성과 함께 지원되어야 하고, 형성은 시간이 지남에 따라 학생들이 스스로 할 수 있도록 점진적으로 제거되어야 한다.
- ▼ 중요한 개념들은 새로운 지식과 이전 지식 사이의 공통성과 차이점을 보여주는 방식으로 전략적으로 통합되어야 한다.
- ▼ 배경지식은 새로운 학습 이전에 준비시켜 학생들이 새로운 지식과 이전 지식을 연결할 준비를 할 수 있게 한다.



- ▼ 복습 기회는 충분하게, 분산하여, 누가적으로 그리고 다양하게 제공하여 적절하게 개발될 수 있도록 한다.

---

## 참고문헌

- CARNINE, D. W., & STEIN, M.** (1981). Organizational strategies and practice procedures for teaching basic facts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(1), 65–69.
- CHARLES, R. I.** (1980). Exemplification and characterization moves in the classroom teaching of geometry concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11 (1), 10–21.
- DAVIS, R. B.** (1990). Discovery learning and constructivism. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- ENGELMANN, S., CARNINE, D., KELLY, B., & ENGELMANN, O.** (1994). *Connecting math concepts, A through F*. Columbus, OH: SRA.
- GELMAN, R.** (1986). Toward an understanding-based theory of mathematics learning and instruction, or in praise of Lampert on teaching multiplication. *Cognition and Instruction*, 3, 349–355.
- GLEASON, M., CARNINE, D., & BORIERO, D.** (1990). Improving CAI effectiveness with attention to instructional design in teaching story problems to mildly handicapped students. *Journal of Special Education Technology*, 10(3), 129–136.
- LEINHARDT, G.** (1987). Development of an expert explanation: An analysis of a sequence of subtraction lessons. *Cognition and Instruction*, 4(4), 225–282.
- LOVELESS, T., & DIPERNA, P.** (2000). How well are American students learning: Focus on math achievement. *The Brown Center Report on American Education*, 1(1).
- MA, L.** (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- MCDANIEL, M. A., & SCHLAGER, M. S.** (1990). Discovery learning and transfer of problem solving. *Cognition and Instruction*, 7(2), 129–159.
- MOULY, G. J.** (1978). *Educational research: The art and science of investigation*. Boston: Allyn & Bacon.
- NATIONAL CENTER FOR EDUCATION STATISTICS.** (2000a). *Mathematics and science in the eighth grade: Findings from the third international mathematics and science study*. NCES 2000-014, Washington, DC.
- THE NATIONAL CENTER FOR EDUCATION STATISTICS.** (2000b). *Results over time: NAEP 1999 long-term trend summary data tables* [On-line]. Available: <http://nces.ed.gov/nationsreportcard/tables/LTT1999/index.shtml>.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS.** (2000). *Principles and standards for school mathematics* [Online]. Available: <http://standards.nctm.org/index.htm>.
- NICKERSON, R. S.** (1985). Understanding. *American Journal of Education*, 93, 201–239.
- OFFICE OF THE SUPERINTENDENT OF PUBLIC INSTRUCTION.** (1998). *Education reform: Introduction to mathematics* [On-line]. Available: <http://www.k12.wa.us/reform/EALR/standards/Subdocuments/pdf/math.pdf>.
- PIAGET, J.** (1973). *The child and reality: Problems of genetic psychology*. New York: Viking Press.
- PRAWAT, R. S.** (1989). Promoting access to knowledge, strategy, and disposition in students: A research synthesis. *Review of Educational Research*, 59(1), 1–41.

- REESE, C. M., MILLER, K. E., MAZZEO, J., & DOSSEY, J. A.** (1997). *NAEP 1996 mathematics report card for the nation and states: Findings from the National Assessment of Educational Progress* [On-line]. Available from National Center for Education Statistics: <http://nces.ed.gov/nationsreportcard/96report/97488.pdf>.
- RESNICK, L. B., CAUZINILLE-MARMECHE, E., & MATHIEU, J.** (1987). Understanding algebra. In J. A. Sloboda & D. Rogers (Eds.), *Cognitive processes in mathematics* (pp. 169–203). Oxford, England: Clarendon Press.
- RESNICK, L. B., & OMANSON, S. F.** (1987). Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (pp. 41–95). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- STEIN, M., SILBERT, J., & CARNINE, D.** (1997). *Designing effective mathematics instruction: A direct instruction approach* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Merrill/Prentice Hall.
- VAN PATTEN, J., CHAO, C., & REIGELUTH, C. M.** (1986). A review of strategies for sequencing and synthesizing instruction. *Review of Educational Research*, 56(4), 437–471.
- VYGOTSKY, L. S.** (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes* (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Soubberman, Eds. and Trans.). Cambridge, MA: Harvard University Press.