제 5 장

최적설계

최적화(optimization)는 "최고"란 의미의 라틴어 "*optimus*"로부터 유래되었다. 공학에서 최적설계는 가능하면 짧은 시간에 최고 성능을 갖는 제품을 가장 값싸게 생산할 수 있는 설계로 정의한다. 제2차 세계대전 이후 가볍고 성능이 우수한 항공기 구조물의 설계를 위하여 시작한 현대 최적설계 기법은 컴퓨터 계산능력의 발전과 함께 실용범위를 점차 확대하고 있다. 이 장에서는 최적설계의 정식화, 도해 최적화, 최적화의 기법, 최적설계의 해법, 반응표면 모델에 의한 최적설계 등을 통해 최적설계의 기본개념을 학습한다.

5.1 최적설계 정식화

일반적으로 설계문제는 소비자의 요구사항으로부터 정의한다. 최적설계문제의 정식화는 소비자의 설계요구를 수학적 표현으로 변환하는 것으로, 설계자가 결정해야 할 모든 변수의 집합인 설계변수(design variables), 최적설계의 기준이 되는 가격함수 (cost function) 또는 목적함수(objective function)와 설계가 꼭 만족하여야 하는 제한조건(constraint)으로 구성된다. 정식화의 과정은 일반적으로 설계변수의 정의, 목적함수의 설정, 제한조건의 도출 등 세 단계를 거친다.

(1) 설계변수의 정의

설계변수는 제품의 두께, 길이, 재료 물성치, 형상 등 설계자가 결정해야 할 모든 변수를 말한다. 설계변수를 정의할 때는 가능하면 서로 독립적으로 정의하여야 한다. 그리고 설계변수의 개수는 가능한 적게 사용하는 것이 효과적이다.

(2) 목적함수의 설정

여러 가지 설계 중 최적의 설계를 결정하기 위한 기준이 되는 함수가 **목적함수**이다. 목적함수로는 제품의 가격, 이익, 중량, 에너지 소모량, 승차감, 최대응력, 고유진동수 등이 사용된다. 일반적으로 설계는 같은 성능이라면 가격이 저렴한 설

계가 좋은 설계이므로 목적함수는 많은 경우 가격함수이다. 또한, 어떤 경우에는 2개 이상의 목적함수가 있을 수 있는데, 예를 들면 구조물의 중량을 최소화하는 동시에 이윤을 최대화하고 싶은 경우 등인데, 이렇게 목적함수가 여러 개 존재하는 경우를 **다중목적함수**라 한다. 이번 장에서는 목적함수가 한 개인 경우에 대해서만 다루도록 한다.

(3) 제한조건의 도출

설계가 꼭 만족해야 하는 모든 조건을 **제한 조건**이라고 한다. 예를 들면 “최대 변형량은 허용 변형량보다 작아야 한다” 등이며, 가격 또는 성능 등도 제한조건이 될 수 있다. 제한조건은 일반적으로 부등식으로 표현되며 이런 제한조건을 부등식제한조건(inequality constraints)이라고 한다. 등식으로 표현되는 제한조건도 취급할 수 있다.

다음은 최적설계 정식화를 예를 들어 설명한다.

예제 1 머그컵 최적설계 정식화

[그림 5-1]과 같은 원통형 머그컵을 설계하고자 한다. 머그컵의 용량은 900cm^{3}보다 크면서 재료비를 최소화하는 설계를 하여 보자. 머그컵의 직경은 5cm보다 크고 9cm보다는 작아야 하며, 높이는 10cm보다 크고 20cm보다 작아야 한다.

(1) 설계변수의 정의 : 먼저 머그컵을 설계하기 위한 설계변수를 선정하자. 이번 예제에서 머그컵이 원통형이라 가정을 한다면 머그컵의 지름(d)과 높이(h)를 설계변수로 정할 수 있다.

(2) 목적함수의 설정 : 머그컵의 재료비는 머그컵의 표면적에 비례하므로 가격함수 또는 목적함수를 머그컵의 표면적으로 설정할 수 있다. 즉, 목적함수로 설정한 머크컵의 표면적(S)은 다음과 같이 설계변수의 함수로 정의한다.

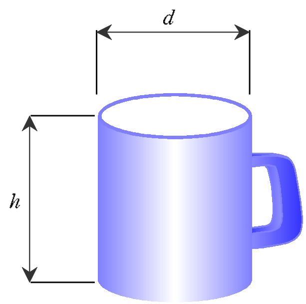
$$S(d, h) = \frac{\pi}{4} d^2 + \pi dh$$

(3) 제한조건의 도출 : 머그컵 최소용량이 900cm^{3}이어야 한다는 요구조건을 수식으로 표현하면 다음과 같은 제한조건을 도출할 수 있다.

$$V(d, h) = \frac{\pi}{4} d^2 h \geq 900$$

또한, 각 설계변수의 상 · 하한값 요구사항을 제한조건 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$5 \leq d \leq 9,$$
$$10 \leq h \leq 20$$



| 그림 5-1 | 머그컵의 설계변수

따라서 이 문제를 최적설계문제로 정식화하면 다음과 같다.

제한조건

$$V(d, h) = \frac{\pi}{4} d^2 h \geq 900$$
$$5 \leq d \leq 9$$
$$10 \leq h \leq 20$$

을 만족하면서 목적함수

$$S(d, h) = \frac{\pi}{4} d^2 + \pi d h$$

가 최소가 되는 설계변수 d와 h를 구한다.

예제 2 이윤 최대 문제 정식화

어느 기계 제조 공장에서 두 가지 모델 A와 B를 생산하고 있다. 이 제조 공장에서 하루에 입고되는 재료를 사용하여 모델 A만 생산하면 하루에 12대를 생산할 수 있으며, 모델 B만 생산하면 8대를 생산할 수 있다. 영업부에서는 하루에 모델 A는 8대, 모델 B는 10대를 판매할 수 있다고 하며, 운송부서에서는 하루에 최대 15대의 기계를 취급할 수 있다고 한다. 이 회사에서 얻는 이윤은 한 대당 기계 A가 40만 원, B가 50만 원이라 한다. 이 회사가 최대 이윤을 내기 위한 기계 모델 A와 B의 생산대수를 결정하고자 한다.

(1) 설계변수의 정의 : 이 문제를 정의하기 위하여 우리가 결정해야 할 기계모델 A와 B의 생산대수를 설계변수로 정의한다.

$x_1 =$ 모델 A의 일일 생산 대수
$x_2 =$ 모델 B의 일일 생산 대수

(2) 목적함수의 설정 : 회사에서 이윤을 최대로 얻고자 하므로 목적함수는 이윤으로 정의하여 최대화한다. 따라서 이윤(P)을 설계변수를 이용하여 다음과 같이 수식화한다.

$$P = 40x_1 + 60x_2 (\text{만원})$$

(3) 제한조건의 도출 : 제조공장에서 모델 A만 생산할 경우 1일 12대를 생산할 수 있으므로 1대의 모델 A를 제조하는 데 필요한 재료는 $x_1/12$이다. 또한 1대의 모델 B를 제조하는 데 필요한 재료는 $x_2/8$이다. 따라서 기계의 생산량 제한 조건을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{8} \leq 1$$

같은 방법으로 기계의 판매량 제한조건을 수식으로 표현하자.

$$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{10} \leq 1$$

또한 운송부서에서 1일 취급한도를 고려한 제한조건을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$x_1+x_2 \le 15$$

끝으로 설계변수는 모두 양수라는 조건을 추가한다.

$$x_1, x_2 \ge 0$$

문제를 정리하여 최적화 문제로 정식화하면 다음과 같다.

제한조건

$$g_1 = \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{5} \le 1$$

$$g_2 = \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{10} \le 1$$

$$g_3 = x_1 + x_2 \le 15$$

$$g_4 = x_1 \ge 0$$

$$g_5 = x_2 \ge 0$$

을 모두 만족하면서 목적함수

$$P = 40x_1 + 60x_2$$

를 최대화하는 설계변수

$$x_1, x_2$$

를 구한다.

예제 3 재활용 처리공장의 최적운영문제 정식화

한 가전제품 재활용 회사는 2개의 재활용 처리공장과 2개의 재활용품 집하장을 가지고 있다. 재활용품 집하장에서는 하루에 250kg씩 재활용품이 수집되며, 재활용품 1kg을

1km 운반하는 데 50원의 비용이 든다. 〈표 5-1〉은 재활용품 집하장으로부터 처리장까지의 거리와 각 처리공장의 1일 처리능력을 나타낸다. 이 재활용 회사에서는 적어도 하루에 400kg의 재활용품을 처리하여야 하며 이 중 운반비가 차지하는 비용이 커서 운반비 절감이 요구된다. 따라서 운반비를 가장 적게 들이기 위하여 각각의 집하장으로부터 2개의 처리공장으로 이송해야 하는 재활용품 양을 구하는 문제를 정의하여 보자.

표 5-1 재활용품 집하장과 처리공장 사이의 거리 및 처리공장의 용량

처리공장	거리(km)		1일 처리량 (kg)
	집하장 1	집하장 2	
처리공장 A	24.0	20.5	240
처리공장 B	17.2	18.0	200

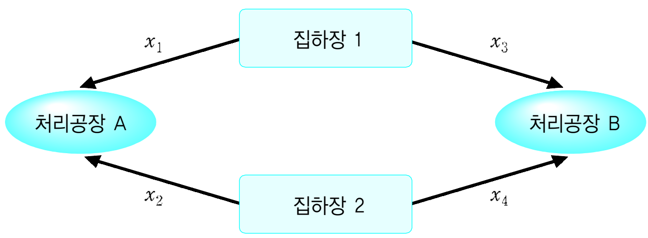
(1) 설계변수의 정의 : 최적화 문제의 정식화를 위하여 [그림 5-2]를 참조하여 설계변수를 다음과 같이 정의하자.

x_1 = 집하장 1에서 처리공장 A까지 수송하는 재활용품 무게

x_2 = 집하장 2에서 처리공장 A까지 수송하는 재활용품 무게

x_3 = 집하장 1에서 처리공장 B까지 수송하는 재활용품 무게

x_4 = 집하장 2에서 처리공장 B까지 수송하는 재활용품 무게



| 그림 5-2 | 재활용 처리공장 운영문제의 설계변수 정의

(2) 목적함수의 설정 : 다음은 목적함수인 운송비(원)를 설계변수의 함수로 정의하여 보자.

$$\text{cost 또는 비용} = 24(50)x_1 + 20.5(50)x_2 + 17.2(50)x_3 + 18(50)x_4$$

(3) 제한조건의 도출 : 재활용품 처리공장의 1일 처리용량에 대한 제한조건은 다음과 같다.

처리공장 A : $x_1 + x_2 \le 240$

처리공장 B : $x_3 + x_4 \le 200$

집하장의 재활용품 수집량에 대한 제한조건은 다음과 같다.

집하장 1 : $x_1 + x_3 \le 250$

집하장 2 : $x_2 + x_4 \le 250$

재활용 공장에서 처리해야 할 최소 처리량에 대한 제한조건은 다음과 같다.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 400$$

또한 실제 문제에서는 모든 설계변수는 음수가 될 수 없으므로 다음과 같은 조건을 추가한다.

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, \cdots, 4$$

이 문제를 정리하여 최적설계문제로 정식화하면 다음과 같이 쓸 수 있다

제한조건

$$g_1 = x_1 + x_2 \le 240$$

$$g_2 = x_3 + x_4 \le 200$$

$$g_3 = x_1 + x_3 \le 250$$

$$g_4 = x_2 + x_4 \le 250$$

$$g_5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 400$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, \cdots, 4$$

을 모두 만족하면서 목적함수

$$\text{cost 또는 비용} = 24(50)x_1 + 20.5(50)x_2 + 17.2(50)x_3 + 18(50)x_4$$

가 최소가 되는 설계변수

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

를 구한다.

일반적으로 m개의 부등식 제한조건, p개의 등식 제한조건을 만족하면서 목적함수를 최소화하는 n개의 설계변수를 찾는 최적화 문제를 정의하면 다음과 같이 수식으로 표현한다.

m개의 부등식 제한조건

$$g_i(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \le 0, \quad i = 1, \cdots\cdots, m$$

과 p개의 등식제한조건

$$h_j(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \le 0, \quad j = 1, \cdots\cdots, p$$

를 모두 만족하면서 목적함수

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

를 최소화하는 설계변수

$$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$$

을 구한다.