에너지 원리에 기초한 해석 9

개요

이 장에서는 소성퍼텐셜의 개념을 설명하고 퍼텐셜을 이용하여 재료의 구성방정식이 도출되는 과정을 설명한다. 또한 변형에너지 개념, 최대 소성 일의 원리와 가상 일의 원리를 설명한다. 소성항복 발생 이후에 재료의 가공경화를 나타내기 위한 방법으로 항복곡면의 등방 팽창을 가정한 등방경화이론과 초기의 항복곡면의 크기는 변하지 않고 항복곡면이 응력 공간 상에서 이동한다고 가정한 이동경화이론들의 특징에 대해서 설명한다. 또한 소성변형 문제에 대한 근사해석 방법으로 널리 알려진 상계해법과 하계해법의 개념을 설명하고 실제 소성가공 문제에 이들을 어떻게 적용하는지를 다양한 예를 통하여 설명한다. 한편 소성변형의 진전과 더불어 재료의 내부에서 발생, 성장하는 재료의 내부 손상을 보이드(void)로 간주하여 재료 내부에 미량의 보이드를 포함한 재료에 대한 가송(Gurson)의 항복조건과 구성식 그리고 소성변형에 따른 내부 손상의 진전을 설명한다. 또한 소성변형의 열적-기계적-조직적 연성문제를 설명한다.

학습목표

1. 소성퍼텐셜의 개념과 이를 이용하여 재료의 구성식을 설명할 수 있다.
2. 최대 소성 일의 원리와 항복곡면의 볼록성을 설명할 수 있다.
3. 프레거의 적합조건으로부터 구성식을 도출하는 방법을 설명할 수 있다.
4. 등방경화이론과 이동경화이론의 차이와 각각의 특징을 설명할 수 있다.
5. 상계해법을 이용하여 쐐기의 압축 붕괴 개시하중을 구하는 방법을 설명할 수 있다.
6. 보이드 재료에 대한 Gurson의 항복조건식과 내부 손상의 진전을 설명할 수 있다.
7. 열과 상변태를 수반한 소성변형과 핫 프레스 성형을 설명할 수 있다.

주요용어

소성퍼텐셜 / 드러커의 경화가설 / 프레거의 적합조건 / 등방경화 / 이동경화 / 비선형 경화 / 복합경화 / 상계해법 / 하계해법 / 보이드 재료 / 가송의 항복조건식 / 변형률 공간

9.1 소성퍼텐셜에 의한 구성방정식

9.1.1 소성퍼텐셜

제3장에서 논한 바와 같이 탄성 재료에 외력이 작용하면 변형이 생기고 이 외력에 의해서 행해진 일은 단위 체적당 작용하는 탄성변형에너지 U_e로서 재료 내에 축척된다. 식 (3-105)로 주어진 탄성변형에너지 U_e를 변형률 ϵ_{ij}로 편미분하면

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_e}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad 여기서 \quad U_e = \int_o^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \tag{9-1}$$

또한 역으로 응력 σ_{ij}로 편미분하면

$$\epsilon_{ij}= \frac{\partial U_e}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \text{여기서} \quad U_e = \int_o^{\sigma_{ij}} \epsilon_{ij} d\sigma_{ij} \tag{9-2}$$

관계가 성립한다. 이와 같이 스칼라 양인 탄성변형에너지 U_e를 변형률 ϵ_{ij} 혹은 응력 σ_{ij}로 편미분하면 각각 응력 σ_{ij} 혹은 변형률 ϵ_{ij}에 대응한 벡터 성분이 구해지기 때문에 탄성변형에너지 U_e는 탄성퍼텐셜(elastic potential)인 것을 알 수 있다.

수학적으로는 함수 $\Phi(x_1, x_2, \cdot\cdot\cdot)$를 각각 변수의 성분 x_i로 편미분한 값이 벡터 F의 변수에 대응한 성분 F_i를 나타낼 때 함수 ϕ를 퍼텐셜이라 한다. 즉,

$$d\Phi = F \cdot dr, \; F = \nabla \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} i + \frac{\partial \Phi}{\partial y} j + \frac{\partial \Phi}{\partial z} k \right) \tag{9-3}$$

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \\ &= (F_x\, i + F_y\, j + F_z\, k) \cdot (dx\, i + dy\, j + dz\, k) \\ &= F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \end{aligned} \tag{9-4}$$

한편 물체가 소성변형을 하고 있을 때 변형에너지의 대부분은 열 등으로 되어 방출되어 물체 내에는 거의 축척되지 않는다. 소성변형 중인 재료의 단위 체적당 방출되는 변형에너지 증분 dW^p는 다음 식으로 주어진다.

$$dW^p = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p = \sigma_{ij}{}' d\epsilon_{ij}^p \tag{9-5}$$

재료가 미제스의 항복조건에 따를 때 식 (5-37)의 상당 응력 $\bar{\sigma}$와 식 (5-57)의 상당 소성변형률 증분 $\overline{d\epsilon^p}$의 정의를 이용하면 dW^p는

$$dW^p = \bar{\sigma}\, \overline{d\epsilon^p} \tag{9-6}$$

가 되고, 이 dW^p를 응력 σ_{ij}로 편미분하면 다음과 같이 된다.

$$d\epsilon_{ij}{}^p = \frac{\partial dW^p}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} d\bar{\epsilon}^p \tag{9-7}$$

따라서 앞의 정의에 따라 상당 응력 $\bar{\sigma}$도 퍼텐셜인 것을 알 수 있다.

이 $\bar{\sigma}$와 같이 소성변형률 증분과 관련이 있는 퍼텐셜을 소성퍼텐셜(plastic potential)이라 하고 일반적으로 응력의 스칼라 함수 $g = g(\sigma_{ij})$로 나타낸다. 이 소성퍼텐셜의 개념을 일반 항복조건에 확장해보자. 소성퍼텐셜 g가 미제스의 항복함수 f에 상응하는 경우에 항복곡면은 응력 공간에서 $g(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}) = c$로 표시되는 등퍼텐셜면(equi-potential surface)임을 알 수 있다.

또한 제5장에서 논한 바와 같이 가공경화 재료의 경우에 중립부하에서는 즉, 응력 증분이 동일한 항복곡면 상에 머물러 있는 경우에는 소성변형률 증분은 생기지 않기 때문에 식 (9-7)에 대응하는 식으로 다음과 같은 식을 생각할 수 있다.

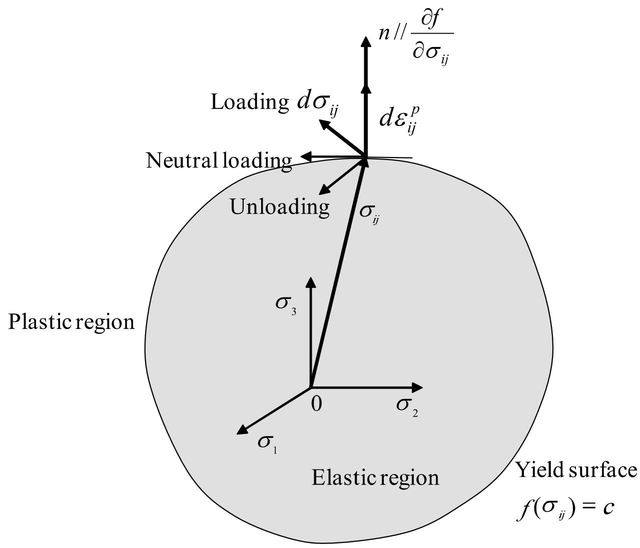

그림 9–1 소성변형률 증분의 수직성

$$\left.\begin{aligned} g \neq f \text{인 경우는} \quad d\epsilon_{ij}{}^{p} &= \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \\ g = f \text{인 경우는} \quad d\epsilon_{ij}{}^{p} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \end{aligned}\right\} \tag{9-8}$$

소성퍼텐셜 g가 항복함수 f와 다른 일반적인 경우에 대한 식 (9-8)의 첫 번째 식을 비연합유동법칙(non-associated flow rule)이라 하고, 소성퍼텐셜 g가 항복함수 f와 같은 경우에 대한 식 (9-6)의 두 번째 식을 연합유동법칙(associated flow rule)이라 한다.

$g = f$인 경우에 식 (9-8)은 소성변형률 증분 $d\epsilon_{ij}^{p}$가 $\partial f / \partial \sigma_{ij}$에 비례하는 것을 나타내고, 그림 9-1에 나타낸 것과 같이 '재료의 응력 σ_{ij}가 항복곡면에 도달하였을 때 야기되는 소성변형률 증분벡터 $\overrightarrow{d\epsilon^{p}}$는 그 응력점에서 항복곡면에 세운 외향법선벡터 $\boldsymbol{n}$의 방향에 평행'인 것을 의미한다. 식 (9-8)을 소성변형률 증분벡터 $\overrightarrow{d\epsilon^{p}}$의 항복곡면 $f(\sigma_{ij})$에 대한 수직성의 조건(normality condition)이라고 한다.

이와 같이 유동법칙에 기초하는 소성이론을 소성퍼텐셜 이론(plastic potential theory)이라고 한다.

식 (4-17)의 미제스 항복함수 f를 소성퍼텐셜로 간주하고

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) &= \frac{1}{6}\left\{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left\{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xz}^2)\right\} \end{aligned} \tag{9-9}$$

이 식을 식 (9-8)에 대입하면 다음 식이 얻어진다.

$$\left.\begin{aligned} d\epsilon_x^p &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\lambda = \frac{2}{3}\left\{\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right\} d\lambda = (\sigma_x - \sigma_m) d\lambda = \sigma_x{}' d\lambda \\ d\epsilon_y^p &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\lambda = \frac{2}{3}\left\{\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)\right\} d\lambda = (\sigma_y - \sigma_m) d\lambda = \sigma_y{}' d\lambda \\ &\cdot\ \cdot \\ d\epsilon_{xy}^p &= \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} d\lambda = \tau_{xy} d\lambda,\ d\epsilon_{yx}^p = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yx}} d\lambda = \tau_{yx} d\lambda (= d\epsilon_{xy}^p) \\ d\epsilon_{yz}^p &= \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\lambda = \tau_{yz} d\lambda, \quad \cdot\ \cdot \end{aligned}\right\} \tag{9-10}$$

따라서

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma_{ij}{}' \tag{9-11}$$

여기서 $\sigma_x{}'$, $\sigma_y{}'$, · · 는 식 (3-23)에서 정의한 편차응력이다.

식 (9-7)에서 $6\tau_{xy}^2$를 $3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2)$와 같이 표시하는 것에 의해 소성퍼텐셜이론에서 유도된 변형률 증분 텐서의 정의가 제5장에서 논한 프란틀 · 로이스의 식과 등가가 된다. 즉

$$d\epsilon_{ij}^p = \sigma_{ij}{}' d\lambda \tag{9-12}$$

$g = f$인 경우에 대한 식 (9-8)은 소성변형률 증분 $d\epsilon_{ij}^p$가 $\partial f / \partial \sigma_{ij}$에 비례하는 것을 나타내고, 그림 9-1에 나타낸 것과 같이 "재료의 응력 σ_{ij}가 항복곡면에 도달하였을 때 야기되는 소성변형률 증분벡터 $\overrightarrow{d\epsilon^p}$는 그 응력점에서 항복곡면에 세운 외향 법선벡터 $\boldsymbol{n}$의 방향, 즉 편차응력의 방향 $\overrightarrow{\sigma'}$에 평행하다"는 것을 의미한다. 식 (9-8)을 소성변형률 증분벡터 $\overrightarrow{d\epsilon^p}$의 항복곡면 $f(\sigma_{ij})$에 대한 수직성의 조건이라고 한다.

만일 미제스 항복조건에 대한 상당 응력 $\overline{\sigma}$를 소성퍼텐셜 f로 간주하면 식 (9-7)의 정의에 따라 $d\epsilon_{ij}^p = (\partial\overline{\sigma}/\partial\sigma_{ij}) d\lambda = (3\sigma_{ij}{}'/2\overline{\sigma}) d\lambda$가 된다. 따라서 이 경우에는 $d\lambda$는 식 (5-64)의 형태가 아니고 $d\lambda = \overline{d\epsilon^p}$로 정의되는 것에 주의하여야 한다.

식 (9-12)는 미제스 항복조건에 대한 다른 정의, 식 (4-13)의 $f = J_2{}' = \sigma_{ij}{}'\sigma_{ij}{}'/2$를 이용하는 것에 의해서 다음과 같이 유도할 수도 있다. 즉, 식 (9-8)의 정의에 의해

$$\begin{aligned} d\epsilon_{ij}^p &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda = \frac{\partial J_2{}'}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda = \frac{\partial J_2{}'}{\partial \sigma_{kl}{}'} \frac{\partial \sigma_{kl}{}'}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \\ &= \frac{\partial\left(\dfrac{\sigma_{kl}{}'\sigma_{kl}{}'}{2}\right)}{\partial \sigma_{kl}{}'} \frac{d}{d\sigma_{ij}}\left(\sigma_{kl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\sigma_{mm}\right) d\lambda = \sigma_{kl}{}'\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{ij}\right) d\lambda \\ &= \sigma_{ij}{}' d\lambda \quad (\because\ \sigma_{kk}{}' = 0) \end{aligned} \tag{9-13}$$

가 증명된다. 이 식의 유도에서 다음 관계를 사용하였다.

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}{}'} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{9-14}$$