제 3 장

선형계획모형 해법

1 서론

선형계획모형이 수립되면 최적해를 구하는 절차가 필요하다. 선형계획모형의 해를 구하는 해법으로 도해법(graphical solution)과 대수적 방법(algebraic method)이 있다. 도해법은 의사결정변수가 2개인 경우에 2차원의 평면상에서 적용될 수 있어 일반적 해법이라고 할 수 없으나 선형계획모형의 최적해를 구하는 해법의 특성을 이해하는 데 필수적이다. 변수가 2개를 초과하면 도해법은 적용될 수 없고 대수적 방법으로 해를 구해야 한다. 대표적인 대수적 방법으로는 심플렉스법, 타원체해법(ellipsoid algorithm), 그리고 Karmarkar의 알고리즘이 있다. 심플렉스법은 1947년에 George B. Dantzig에 의하여, 타원체해법은 1979년 Khachian에 의하여, Karmarkar의 알고리즘은 1984년 Karmarkar에 의하여 개발되었으며 내부점해법(interior-point algorithm)으로도 불린다. 타원체해법은 현재 거의 사용되지 않고 있으며 규모가 큰 선형계획모형에 있어서는 근사치를 제공하는 내부점해법이 심플렉스법보다 복잡성

측면에서 우수한 것으로 알려져 있으나 일반적인 규모에서는 심플렉스법의 효용성이 인정되어 아직도 널리 사용되고 있다. 이 장에서는 해법의 전반적인 이해를 돕기 위해 도해법을 제시하고 심플렉스법의 경우에는 해법의 절차에 대한 기본적인 개념을 제시한다.

2 도해법

도해법은 선형계획모형의 제약식을 2차원의 평면상에 그래프로 표현하여 실행가능영역을 구하고 실행가능영역 내부에 존재하는 수많은 실행가능해 중에서 가장 크거나 작은 목적함수의 값을 갖는 해를 도출해 내는 접근방법이다. 다음의 선형계획모형을 보자.

1) 모형화

한미페인트는 건축용 페인트와 공업용 페인트 두 종류의 페인트를 생산하여 판매한다. 건축용 페인트는 갤런(gallon)당 4,000원의 이익을, 공업용 페인트는 5,000원의 이익을 얻는다. 두 제품은 가공공정과 혼합공정을 거치는데 건축용 페인트 1갤런을 생산하기 위해서는 가공공정에서 4시간, 혼합공정에서 2시간의 작업이 필요하며 공업용 페인트 1갤런을 생산하기 위해서는 가공공정에서 2시간, 혼합공정에서 3시간의 작업이 필요하다. 하루에 가능한 작업시간은 가공공정이 100시간, 혼합공정이 60시간이다. 공업용 페인트는 특수한 색소가 첨가되는데 1갤런을 가공하는 데 색소는 2g이 필요하며 하루에 가용가능한 색소는 20g이다. 이익을 최대로 하기 위해 하루에 생산해야 할 건축용 페인트와 공업용 페인트를 구하여 보자.

주어진 문제의 의사결정변수는 다음과 같다.

X_1 : 건축용 페인트의 하루 생산량(단위 : 갤런)

X_2 : 공업용 페인트의 하루 생산량(단위 : 갤런)

가공공정, 혼합공정, 그리고 특수한 색소의 제약조건을 고려하여 수립된 선형계획모형은 아래와 같다.

$$
\begin{aligned}
Max.\quad & Z = 4{,}000X_1 + 5{,}000X_2 \\
s.t.\quad & 4X_1 + 2X_2 \le 100 \\
& 2X_1 + 3X_2 \le 60 \\
& \qquad\quad 2X_2 \le 20 \\
& X_1,\ X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

2) 실행가능영역

이제 주어진 선형계획모형에 도해법을 적용해 보자. 도해법은 먼저 제약식을 고려하여 실행가능영역을 구하는 것으로부터 시작된다. 그러므로 먼저 좌표평면을 횡축은 변수 X_1으로 종축은 변수 X_2로 구성하고 첫 번째 제약식 $4X_1 + 2X_2 \le 100$이 만족시키는 영역을 보자. 이를 위하여 첫 번째 제약식의 부등식을 등식으로 놓은 $4X_1 + 2X_2 = 100$이 초평면(hyperplane)이 되어 주어진 평면을 2개의 반평면(half plane, half space)으로 구분한다. 이제

그림 3.1 가공공정 제약식

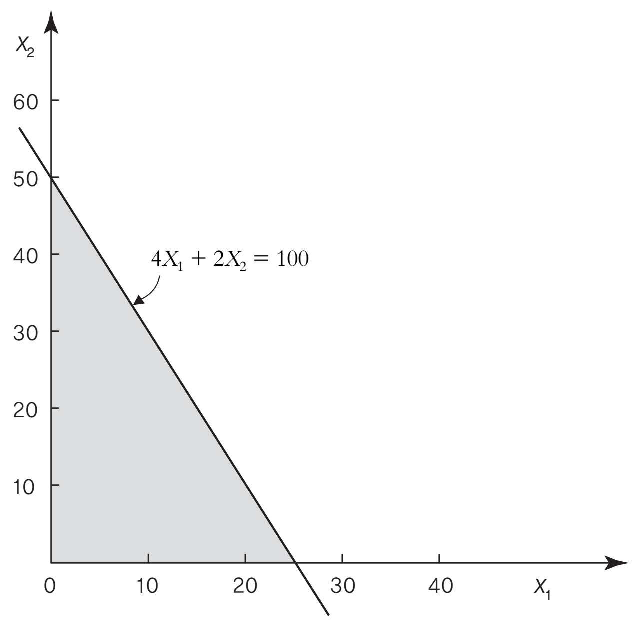
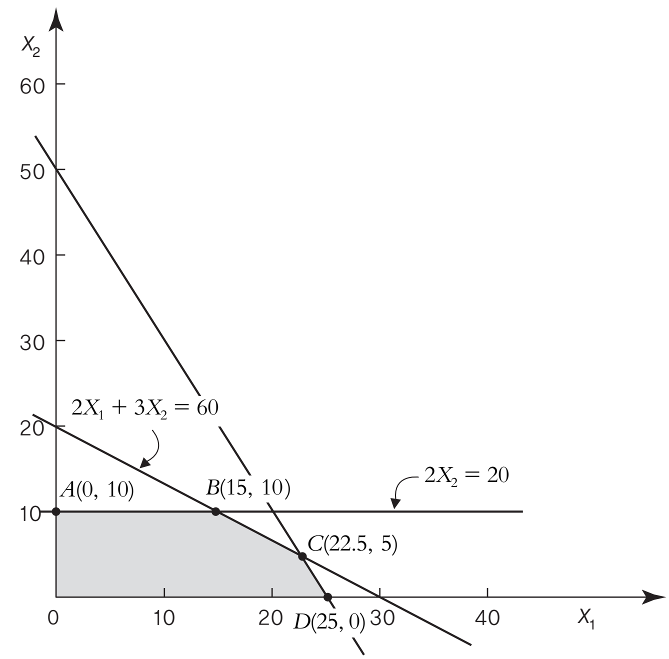


그림 3.2 실행가능영역



원래의 부등식으로 돌아가면 주어진 초평면의 좌측 하단이 원래의 부등식을 만족시키는 영역이 된다.

이제 동일한 좌표평면에 주어진 제약식을 모두 표현하면 실행가능영역은 빗금 친 부분이 되며 주어진 실행가능영역에는 무한개의 실행가능해 (X_1, X_2)가 존재함을 알 수 있다.

3) 최적해

최적해 (X_1^*, X_2^*)를 구한다는 것은 실행가능영역에 존재하는 모든 대안, 즉 해 중에서 목적함수의 값 Z가 가장 큰 점을 구하는 것이다. 이를 위해서는 주어진 평면상에 동일한 이익 Z를 제공하는 직선을 도출하고 이 직선을 상하로 평행으로 이동하여 실행가능영역 내에서 가장 큰 Z값을 제공하는 극점(extreme point) (X_1, X_2)를 구한다. 예를 들면 $Z = 100{,}000$원이라 하면 주어진 직선은 실행가능영역 내의 점 D와 E를 통과하므로 주어진 직선이 극

점 C를 만날 때까지 위로 평행이동하면 목적함수 값 Z를 최대화할 수 있다. 그러므로 최적해 (X_1^*, X_2^*)는 극점 C를 교차하는 가공공정과 혼합공정의 제약식을 등식으로 놓은 다음의 두 직선으로 구성된 연립방정식을 풀어 (22.5, 5)가 된다.

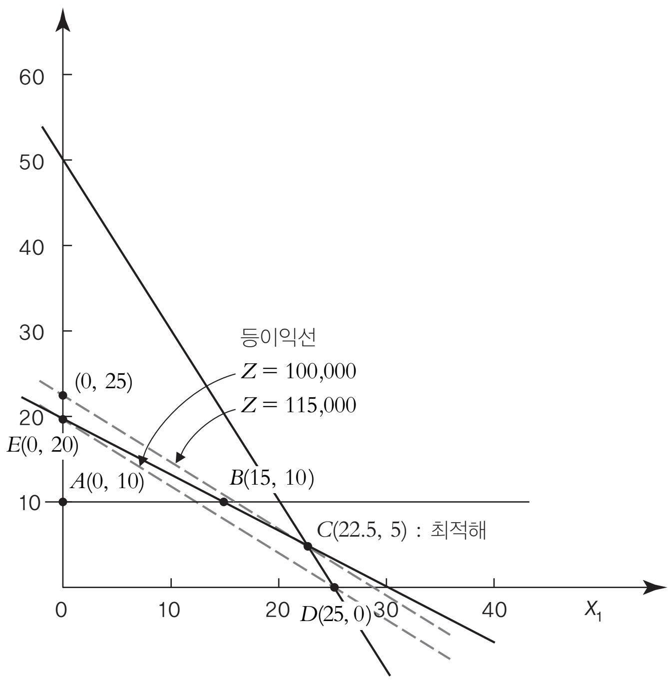
$$4X_1 + 2X_2 = 100$$
$$2X_1 + 3X_2 = 60$$

이때 최적 총이익은 115,000이다.

$$Z^* = 4{,}000 \times 22.5 + 5{,}000 \times 5 = 115{,}000$$

평면상에서 동일한 이익 Z를 구성하는 직선을 등이익선(iso-profit line)이라 하고 이는 동일한 Z값을 갖는 해를 나타내는 점 (X_1, X_2)로 구성된다. 그러므로 제시된 예의 경우 주어

그림 3.3 **최적해**



진 직선을 구성하는 모든 점은 총이익 Z가 동일하게 100,000원인 점이다.

최소화문제에 있어서는 등이익선 대신 등비용선(iso-cost line)을 도출하고 이 직선을 상하로 평행이동하여 실행가능영역 내에서 가장 적은 Z값을 제공하는 극점 (X_1, X_2)이 구하고자 하는 최소점이 된다.

선형계획모형의 실행가능영역은 볼록집합(convex set)을 형성한다. 볼록집합이란 의미는 실행가능영역 내에 존재하는 어떠한 두 점을 이어 주는 직선도 모두 실행가능영역 내부에 존재하여야 함을 의미한다. 선형계획모형과 같이 목적함수가 선형이고 실행가능영역이 볼록집합인 경우에는 최적해는 항상 실행가능영역을 구성하는 극점 중 하나가 된다. 도해법이 해법으로 실제적인 의미를 갖는 것은 아니나 최적해를 도출하는 데 필요한 실행가능영역과 해법의 기본원리에 대한 접근을 쉽게 하여 선형계획모형에 대한 이해를 돕는다.

3 정규형

제약식이 모두 등식으로 변수가 모두 비음으로 치환되면 이를 정규형(canonical form) 선형계획모형이라 한다. 심플렉스법은 주어진 선형계획모형을 정규형으로 치환한 후 적용할 수 있도록 설계되어 있다. 또한 선형계획법에 대한 더 깊은 이해를 위해서는 부등식의 제약식을 동일한 의미를 갖는 등식의 제약식으로 치환할 필요가 있다.

일반적으로 부등식이 ≤ 형태인 제약식의 우변은 공급능력(capability)을, 좌변은 실제로 사용된 양을 의미하고, 부등식이 ≥ 형태인 제약식의 우변은 필요량(requirement)을, 좌변은 실제로 공급된 양을 나타낸다. 먼저 부등식이 ≤ 형태인 경우를 보자. 설명을 위하여 앞에 주어진 한미페인트의 가공공정의 제약식을 보자.

$$4X_1 + 2X_2 \leq 100$$

좌변의 식 $4X_1 + 2X_2$는 페인트 생산량이 (X_1, X_2)일 때 실제 작업에 사용된 가공공정의 시간을, 우변항 100은 사용이 가능한 가공공정의 공급량을 나타낸다. 우변항에 주어진 자원의 공급량은 생산량 (X_1, X_2)에 의하여 전부 사용되기도 하고 일부만 사용되기도 한다.

그러므로 주어진 부등식은 새로운 변수 $s_1(\geq 0)$을 정의하여 도입함으로써 다음과 같이 등식으로 표현될 수 있다.

$$4X_1 + 2X_2 + s_1 = 100$$

새로 도입된 변수 s_1을 여유변수(slack variable)라 하며 생산량이 (X_1, X_2)일 때 사용하고 남은 자원의 양을 의미한다. 그러므로 $s_1 = 0$이면 우변에 주어진 자원이 모두 사용되어 남는 여분의 자원이 없음을 의미하며 이러한 경우 주어진 제약식을 속박제약식(binding constraint)이라 한다. 만약 $s_1 > 0$이면 현재의 생산량 (X_1, X_2)에서는 우변에 주어진 자원이 모두 사용되지 않고 사용하고 남은 여분의 자원이 아직도 s_1만큼 남아 있음을 의미하고 이러한 제약식을 비속박제약식(nonbinding constraint)이라 한다. 만약 최적해에서 추가적인 예산을 투입하여 자원을 더 확보하려고 한다면 여분의 자원이 없는 속박제약식에 해당하는 자원을 우선적으로 확보해야 할 것이며 비속박제약식으로 판명된 자원의 추가확보는 불필요하다.

이제 예로 주어진 한미페인트의 최적해 $(X_1^*, X_2^*) = (22.5, 5)$에서 제약식이 속박제약식인지 비속박제약식인지 보자. 여유변수를 도입하여 이들을 모두 등식으로 하고 주어진 생산량을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 4X_1 + 2X_2 + s_1 &= 4 \times 22.5 + 2 \times 5 + 0 = 100 \\ 2X_1 + 3X_2 + s_2 &= 2 \times 22.5 + 3 \times 5 + 0 = 60 \\ 2X_2 + s_3 &= 2 \times 5 + 10 \qquad\qquad = 20 \end{aligned}$$

그러므로 $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 10$으로 가공공정과 혼합공정은 속박제약식으로 최적해에서 공급능력을 다 소비하여 여분으로 남는 시간이 없으며 색소의 제약식은 비속박제약식으로 생산에 사용하고도 아직 10g이 사용되지 않고 남아 여유가 있음을 의미한다. 그러므로 최적해에서 추가로 자원을 확보하여 페인트의 생산량을 증대하려고 계획한다면 색소보다는 가공공정이나 혼합공정에 투자해야 할 것이다.

이제 ≥ 형태의 부등식을 갖는 다음의 제약식을 보자.

$$2X_1 + X_2 \geq 100$$

새로운 변수 $s_4(\geq 0)$를 정의하여 주어진 제약식을 등식으로 정리하면 아래와 같다.

$$2X_1 + X_2 - s_4 = 100$$

주어진 제약식의 우변은 필요량을, 좌변은 공급량을 나타내므로 새로이 정의된 변수 s_4는 초과공급량을 의미하며, 부등식이 ≤ 형태인 경우와는 별도로 잉여변수(surplus variable 또는 negative slack variable)라 부른다. 그러나 부등식이 ≥ 형태인 경우에는 선형계획모형을 정규형으로 정리하여 심플렉스법을 적용하기 위해서는 잉여변수 외에도 인위변수(artificial variable) $a_4(\geq 0)$를 새로이 정의해야 한다. 그러므로 제약식은 다음과 같다.

$$2X_1 + X_2 - s_4 + a_4 = 100$$

부등식이 ≥ 형태인 경우에도 필요량과 공급량이 일치하면 속박제약식이며, 공급량이 필요량을 초과하면 비속박제약식으로 마찬가지로 정의된다. 요약하면 정규형을 정의하기 위해서는 부등식이 ≤ 형태인 경우에는 여유변수를, 부등식이 ≥ 형태인 경우에는 잉여변수와 인위변수를 추가로 정의하고 도입해야 함을 알 수 있다.

예로 다음의 선형계획모형을 보자.

$$\begin{aligned} Min.\quad & 2X_1 + 3X_2 \\ s.t.\quad & X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ & 2X_1 + X_2 \geq 8 \\ & X_1,\ X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

주어진 선형계획모형의 정규형은 다음과 같으며 새로이 정의된 여유변수 s_1, 잉여변수 s_2, 그리고 인위변수 a_1의 목적함수의 계수는 모두 0이다.

$$\begin{aligned} Min.\quad & 2X_1 + 3X_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0a_1 \\ s.t.\quad & X_1 + 2X_2 + s_1 = 10 \\ & 2X_1 + X_2 - s_2 + a_1 = 8 \\ & X_1,\ X_2,\ s_1,\ s_2,\ a_1 \geq 0 \end{aligned}$$

그러므로 정규형이란 등식의 제약식에 여유변수와 인위변수에 의하여 만들어진 단위행렬(unit matrix)을 포함해야 함을 알 수 있으며, 인위변수는 부등식이 ≥ 형태인 경우에 단위행렬을 구성하기 위해 도입되었음을 알 수 있다. 그러나 인위변수를 활용하는 심플렉스는 이 책의 범위를 벗어나 다루지 않는다.

4 기저해

다시 앞 절에 제시된 정규형의 선형계획모형에 있어서 제약식으로 구성된 연립방정식을 보자.

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + s_1 \qquad\qquad &= 10 \\ 2X_1 + X_2 \qquad - s_2 + a_1 &= 8 \end{aligned}$$

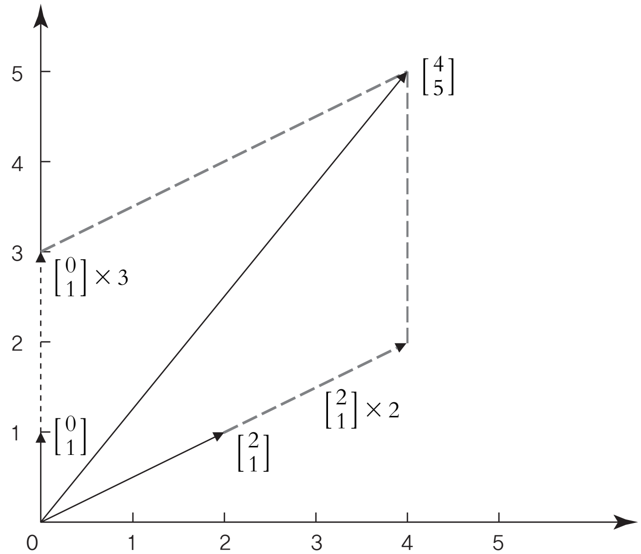
주어진 연립방정식을 열벡터(column vector)를 이용하여 선형결합(linear combination)으로 표시하면 다음과 같다.

$$X_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + X_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + s_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + s_2\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} + a_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\8\end{bmatrix}$$

여기에서 X_1, X_2, s_1, s_2, a_1은 상수이고 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$은 2차원의 열벡터로서 주어진 벡터들의 선형결합이 우변의 열벡터 $\begin{bmatrix}10\\8\end{bmatrix}$이 되어야 함을 의미한다. 우변의 열벡터 $\begin{bmatrix}10\\8\end{bmatrix}$을 만드는 방법은 다양하다. 예를 들어 $X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ s_1 = 10,\ s_2 = 0,\ a_1 = 8$ 또는 $X_1 = 4,\ X_2 = 0,\ s_1 = 6,\ s_2 = 0,\ a_1 = 0$ 또는 $X_1 = 2,\ X_2 = 4,\ s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ a_1 = 0$ 그리고 $X_1 = 0,\ X_2 = 5,\ s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ a_1 = 3$ 등이 있으며 결과적으로 좌변의 여러 벡터 중에서 서로 선형독립(linearly independent)인 2개의 벡터만 있으면 이들의 선형결합으로 우변항의 벡터가 얻어짐을 알 수 있다. 이를 정규형으로 치환된 선형계획모형의 해의 측면에서 해석하면 제약식이 2개의 방정식으로 구성된 경우에는 5개의 변수 중에서 2개의 변수만이 양의 값을 가지며 나머지 3개의 변수는 0의 값을 가짐을 의미한다. 예로 주어진 해들은 선형계획모형에 있어서 실행가능영역의 극점에 해당하는 점들이다.

m개의 제약식을 갖는 경우, 즉 m 차원으로 정의되는 벡터에 있어서도 마찬가지 결과가

그림 3.4 선형결합



적용된다. m 차원에 존재하는 어떠한 벡터도 선형독립인 m 벡터들의 선형결합으로 얻어질 수 있다. 선형결합이란 벡터들의 가중합(weighted sum)을 의미하며 각각의 벡터를 늘리거나 줄여 서로 더함을 의미한다. 예를 들어 그림 3.4에는 다음의 선형결합이 그림으로 표시되고 있다.

$$2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

1) 선형독립

m개의 실수 $X_1, \cdots, X_m$과 m 차원에서 정의되는 m개의 벡터 $v^1, \cdots, v^m$의 선형결합 $X_1v^1 + \cdots + X_mv^m = 0$의 유일한 해가 오직 $X_1 = \cdots = X_m = 0$일 때 주어진 벡터 $v^1, \cdots, v^m$은 서로 선형독립이라 하며 최소한 하나라도 0이 아니면 주어진 벡터들은 선형종속(linearly dependent)이라 한다. 선형종속이란 주어진 벡터 중 최소한 하나의 벡터는 다른 벡터들의

선형결합으로 얻어질 수 있음을 의미한다. 예를 들어 두 벡터 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$와 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$은 서로 선형독립이나 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$와 $\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$나 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$와 $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$는 서로 선형종속이다. 왜냐하면 $X_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + X_2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$은 $X_1 = X_2 = 0$일 때만 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$이나 다른 벡터들의 경우에는 $2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 또는 $2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$이 성립하기 때문이다. 2차원에서 서로 종속적인 2개의 벡터는 하나의 직선상에, 3차원에서 서로 종속적인 3개의 벡터는 하나의 직선이나 하나의 평면 위에 모두 존재하는 경우이다. 이는 선형계획모형의 해를 도출하는 과정에서 변수 값이 양의 값을 갖는 벡터들, 즉 기저(basis)를 이루는 벡터들은 서로 선형독립이어야 함을 의미한다.

2) 기저변수

m개의 제약식을 갖는 선형계획모형의 해는 양수 값을 갖는 m개의 변수와 0의 값을 갖는 나머지 변수로 구성되며, 이 중 양수 값을 갖는 m개의 변수를 기저변수(basic variable), 나머지 0의 값을 갖는 변수를 비기저변수(nonbasic variable)라 한다. 또한 이러한 해를 기저해(basic feasible solution)라 하고 양수 값을 갖는 기저변수와 이에 해당하는 벡터들의 선형결합으로 우변항의 벡터를 만들며, 이때 사용된 m개의 서로 독립적인 벡터들을 기저를 이룬다고 한다.

5 심플렉스법

선형계획모형의 해법으로 가장 널리 적용되는 심플렉스법은 실행가능영역을 구성하는 수도 없이 많은 점 중에서 단지 극점만을 해의 대상으로 하여 하나의 극점에서 인접한 극점으로 순차적으로 최적해를 탐색해 가는 방법이다. 심플렉스법은 심플렉스법이 그 복잡성에 있어서 다항시간 알고리즘이 아니라, 문제의 크기가 커지면 요구되는 계산의 수도 지수적으로 증가하는 단점이 있으나 현실에서 실제로 적용되는 대부분의 문제는 규모가 매우 크지 않고 일반적이므로 심플렉스법이 실제에 있어서 매우 효율적으로 적용되고 있다.

여기에서는 심플렉스법을 최대화문제에 국한하여 대수적으로 접근하여 심플렉스법에 대한 기본적인 이해만을 갖고자 한다. 심플렉스의 완전한 이해나 최소화문제에 적용되는 big-M법(big-M method), 두 단계법(two Phase method), 그리고 다른 접근을 추구하는 쌍대심플렉스법(dual simplex method) 등 다양한 심플렉스법에 대해서는 다른 서적을 참조하자.

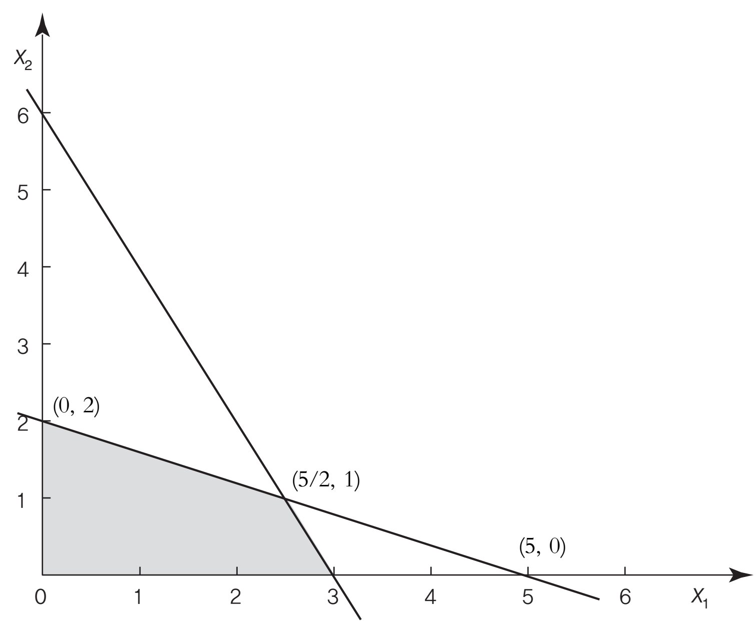
다음의 선형계획모형을 보자.

$$
\begin{aligned}
Max.\quad & Z = 2X_1 + 3X_2 \\
s.t.\quad & 2X_1 + 5X_2 \leq 10 \\
& 2X_1 + X_2 \leq 6 \\
& X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

주어진 선형계획모형의 실행가능영역이 그림 3.5에 주어져 있다.

심플렉스를 적용하기 위해 주어진 선형계획모형을 정규형으로 변형하면 다음과 같다.

그림 3.5 실행가능영역



$$
\begin{aligned}
Max.\quad & Z = 2X_1 + 3X_2 \\
s.t.\quad & 2X_1 + 5X_2 + s_1 \qquad = 10 \\
& 2X_1 + X_2 \qquad + s_2 = 6 \\
& X_1,\ X_2,\ s_1,\ s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

심플렉스법은 초기해(initial basic feasible solution)인 극점 (0, 0)에서 시작하여 하나의 극점에서 인접한 다음 극점으로 순차적으로 이동하며 주어진 극점이 최적해임이 판명되면 해법을 종료하는 반복적 방법(iterative method)이다. 다음은 심플렉스법을 적용한 결과이다.

해 0 $(X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ Z = 0)$

$$\Downarrow$$

$$Z = 2X_1 + 3X_2$$

$$\Leftarrow\ s_1 = 10 - 2X_1 - 5X_2 \qquad X_2 \leq 2$$

$$s_2 = 6 - 2X_1 - X_2 \qquad X_2 \leq 6$$

해 1 $(0, 2, 6)$

$$\Downarrow$$

$$Z = 2X_1 + 3\left[2 - \frac{2}{5}X_1 - \frac{1}{5}s_1\right] = 6 + \frac{4}{5}X_1 - \frac{3}{5}s_1$$

$$X_2 = 2 - \frac{2}{5}X_1 - \frac{1}{5}s_1 \qquad X_1 \leq 5$$

$$\Leftarrow\ s_2 = 6 - 2X_1 - \left[2 - \frac{2}{5}X_1 - \frac{1}{5}s_1\right] = 4 - \frac{8}{5}X_1 + \frac{1}{5}s_1 \qquad X_1 \leq \frac{5}{2}$$

해 2 $\left[\frac{5}{2}, 1, 8\right]$

$$Z = 6 + \frac{4}{5}\left[\frac{5}{2} + \frac{1}{8}s_1 - \frac{5}{8}s_2\right] - \frac{3}{5}s_1 = 8 - \frac{1}{2}s_1 - \frac{5}{8}s_2$$

$$X_2 = 2 - \frac{2}{5}\left[\frac{5}{2} + \frac{1}{8}s_1 - \frac{5}{8}s_2\right] = 1 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2$$

$$X_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{8}s_1 - \frac{5}{2}s_2$$

적용된 심플렉스법의 절차를 설명한다. 해법은 해 0, 즉 초기해인 극점 (0, 0)에서 시작하여 다음 해는 인접한 극점인 극점 (0, 2)가 되고 다음에는 인접한 극점인 극점 (5/2, 1)로 이동하며 이때 최적해가 된다. 그러므로 알고리즘은 3번의 반복(iteration)과정 후 최적해에 도달하고 해법을 종료한다. 반복과정 중 주어진 하나의 극점에서 첫 번째 식은 Z로 표현되며 Z는 현 극점에서의 목적함수의 값과 비기저변수를 변수로 하는 함수로 이루어진다. 즉 극점 (0, 0)에서의 첫 번째 식은 Z로 표현되어 극점 (0, 0)에서의 목적함수 값인 0과 비기저변수인 X_1과 X_2의 함수인 $2X_1 + 3X_2$로 이루어진다. 그러므로 초기해인 극점 (0, 0)에서 목적함수 값은 0이고 다음 극점 (0, 2)에서의 목적함수 값은 6, 그리고 최적해인 극점 (5/2, 1)에서의 목적함수 값은 8임을 확인할 수 있다. 제약식에 해당하는 두 번째, 세 번째 식에서는 좌변은 기저변수가, 우변은 주어진 극점에서의 좌변에 주어진 기저변수의 값과 비기저변수를 변수로 갖는 함수로 구성된다. 즉 극점 (0, 0)을 보면 두 번째 식의 좌변에는 현 극점에서의 기저변수인 s_1이 있으며 우변에는 현 극점에서의 기저변수인 s_1의 값 10과 비기저변수들의 함수인 $-2X_1 - 5X_2$로 이루어진다.

이제 극점에서 다음 인접한 극점으로 이동하는 반복과정을 설명한다. 하나의 해인 현재의 극점에서 다음의 해인 인접한 극점으로 옮겨 가기 위해서는 현재의 비기저변수 중 하나가 기저로 진입하여 기저변수가 되고 대신 현재의 기저변수 중 하나는 기저를 이탈하여 비기저변수가 된다. 비기저변수에서 기저변수가 된다는 것은 현재 변수 값 0에서 변수 값이 증가하여 양수 값을 갖는다는 것을 의미하며 이를 진입변수(entering variable)라 하고 기저변수에서 비기저변수가 된다는 것은 현재는 변수 값이 양수이나 이제 그 값이 0이 된다는 것을 의미하며 이를 진출변수(leaving variable)라 한다. 그러므로 기저변수와 비기저변수의 수는 반복과정을 통하여 항상 일정하게 유지된다. 이제 진입변수와 진출변수를 선별하는 방법을 보자. 진입변수는 현재의 목적함수에서 가장 큰 계수 값을 가진 변수가 된다. 해 0의 경우를 예로 보면, 비기저변수 X_1은 계수가 2 비기저변수 X_2는 계수가 3이고 3이 2보다 크므로 X_2가 진입변수가 된다. 이는 X_2를 현재 값 0에서 1단위 늘리면 목적함수 값은 3 증가하나 X_1은 2밖에 증가하지 않으므로 이 중 하나만 그 값을 양수로 해야 한다면 X_1보다는 X_2를 현재의 값 0에서 양수 값으로 증가시키겠다는 것이다. X_2가 진입변수로 결정되면 이

제 기저변수인 s_1과 s_2 중 하나는 진출변수가 되어야 하며 진출변수를 결정하기 위해서는 최소비율검사(minimum ratio test)를 한다. 먼저 현재 값이 10인 기저변수 s_1의 경우를 보자. 비기저변수 X_2가 1단위 증가할 때마다 기저변수 s_1은 5단위가 감소하므로 비음제약조건을 만족시키기 위해서는 X_2는 2단위 이상으로는 증가하지 못한다. 반면에 현재 6의 값을 갖는 기저변수 s_2의 경우를 보자. X_2가 1단위 증가할 때마다 기저변수 s_2는 1단위가 감소하므로 비음제약조건을 만족시키기 위해서는 X_2는 6단위까지 증가할 수 있다. 결과적으로 비기저변수 X_2는 그중 최소값인 2 이상은 증가될 수 없으며 먼저 0에 도달하는 기저변수 s_1이 진출변수가 된다. 즉 최소비율검사란 진출변수를 결정하는 데 10/5과 6/1 중 적은 값을 갖는 기저변수를 진출변수로 결정함을 의미하며 진출변수가 되면 다음 해에서는 비기저변수가 된다.

이제 X_2가 진입변수, s_1이 진출변수로 결정되었으므로 진출변수에 해당하는 $s_1 = 10 - 2X_1 - 5X_2$가 피봇행(pivot row)이 되어 기본행변환(elementary row operation)이 수행되어 진입변수 X_2에 대하여 치환된다. 그러므로 $X_2 = 2 - 2X_1/5 - S_1/5$로 새로이 정리되고 다른 행들에 대하여 X_2 대신 우변의 식 $2 - 2X_1/5 - S_1/5$을 대입하여 정리하면 해 1이 얻어진다. 이러한 과정은 최적해에 도달할 때까지 반복적으로 수행되며 본 예에서는 해 2가 얻어질 때까지 반복된다.

최적해는 목적함수의 계수 값들에 의하여 판정된다. 만약 목적함수의 비기저변수의 계수들이 모두 음수 값을 가지면 이는 진입변수가 될 수 있는 비기저변수가 없다는 것이며 최적해에 도달함을 의미한다. 이 예에서는 해 2에서 최적해가 된다. 해 2에서는 목적함수의 비기저변수의 계수가 $-1/2$과 $-5/8$로 모두 음수 값이며, 이는 비기저변수 s_1이나 s_2가 현재의 값 0에서 증가하면 목적함수 값이 오히려 감소하게 되어 최적해에 도달하였음을 의미한다.

그러므로 최대화문제에 적용되는 심플렉스법을 정리하면 다음과 같다.

① 선형계획모형을 정규형으로 정리한다.

② 진입변수를 결정한다.

③ 진출변수를 결정한다.

④ 해를 개선하고 최적해가 아니면 ②로 간다.

6 컴퓨터 소프트웨어 활용

선형계획모형의 해를 제공하는 컴퓨터 소프트웨어는 매우 다양하다. 다양한 경영과학모형의 해를 함께 제공하는 종합적 소프트웨어, PC전용 소프트웨어, 스프레드시트를 활용하는 소프트웨어 등 그 내용에 있어서도 여러 형태를 갖는다. 선형계획모형 및 해법과 관련된 소프트웨어의 포괄적인 내용에 대하여는 '안재근, 선형계획법 소프트웨어 서베이, IE매거진 15권 2호 통권 40호(2008 여름), pp. 37～45'를 참조하기 바란다. 대부분의 소프트웨어는 선형계획모형의 해를 얻는 명령어가 매우 쉽게 설계되어 있다.

7 특수한 경우

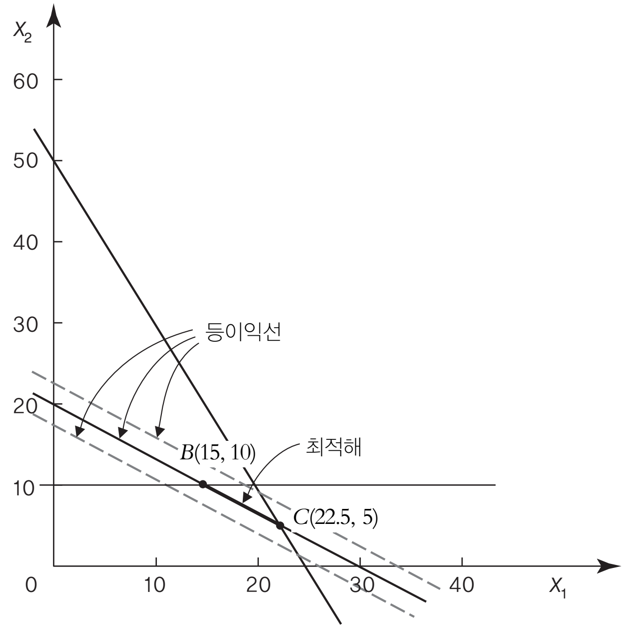
1) 해의 종류

선형계획모형의 최적해가 유일하게 존재하는 것은 아니다. 최적해가 존재하는 경우에도 동일한 목적함수 값을 갖는 최적해가 무한개로 존재할 수 있고 무한대(unbounded)의 목적함수 값을 가질 수도 있으며 해가 존재하지 않는 경우도 있다. 그러므로 여기에서는 특수한 해의 경우를 보자.

가 복수 최적해 : 이 장 도해법에서 다루었던 한미페인트의 선형계획모형을 다시 보자. 이제 공장용 페인트의 갤런당 이익이 5,000원이 아니고 6,000원이라 하면 변수 X_2 목적함수의 계수가 6,000이 되어 선형계획모형과 도해법으로 얻어진 최적해는 그림 3.6과 같다.

$$\begin{array}{ll} Max. & Z = 4{,}000X_1 + 6{,}000X_2 \\ s.t. & 4X_1 + 2X_2 \le 100 \\ & 2X_1 + 3X_2 \le 60 \\ & 2X_2 \qquad\quad \le 20 \\ & X_1,\ X_2 \ge 0 \end{array}$$

그림 3.6 최적해



변수 X_2의 목적함수 계수가 6,000이면 목적함수와 혼합공정의 기울기가 같아지고 등이익선 $Z = 115{,}000$의 경우를 보면 두 직선이 극면(extreme face) BC에서 서로 겹치게 된다. 이 경우에는 극점 $B(15, 10)$과 극점 $C(22.5, 5)$ 사이의 모든 점이 모두 동일한 목적함수 값 $Z = 115{,}000$원을 갖는 해가 되어 결과적으로 무수히 많은 최적해가 존재한다. 그러므로 목적함수와 제약식이 같은 기울기를 갖는 경우에 다수의 최적해를 갖게 되며 최적해는 극점에서뿐만 아니라 극면에서도 존재하게 됨을 알 수 있다. 만약 다수의 최적해가 주어진다면 어느 해를 취해도 무관하게 목적함수를 최대화하는 생산믹스가 될 것이나 가능하다면 제품특성, 시장여건 또는 자원의 유효성 등 제반 환경을 추가적으로 고려할 수 있을 것이다.

나 무한해 : 다음과 같은 선형계획모형을 보자. 주식회사 백두에서는 슈퍼용 냉장고와 가정용 냉장고를 생산하고 있다. 신제품인 새로운 모터를 장착한 슈퍼용 냉장고는 마케

팅을 목적으로 200대 이상의 생산을 계획하고 있으며 적어도 가정용 냉장고보다 100대 이상 생산하려고 계획하고 있다. 슈퍼용 냉장고는 마케팅을 목적으로 저렴하게 공급하여 1대당 이익은 5만 원이며 가정용 냉장고도 1대당 이익은 5만 원이다. 최적 생산믹스를 구해 보자.

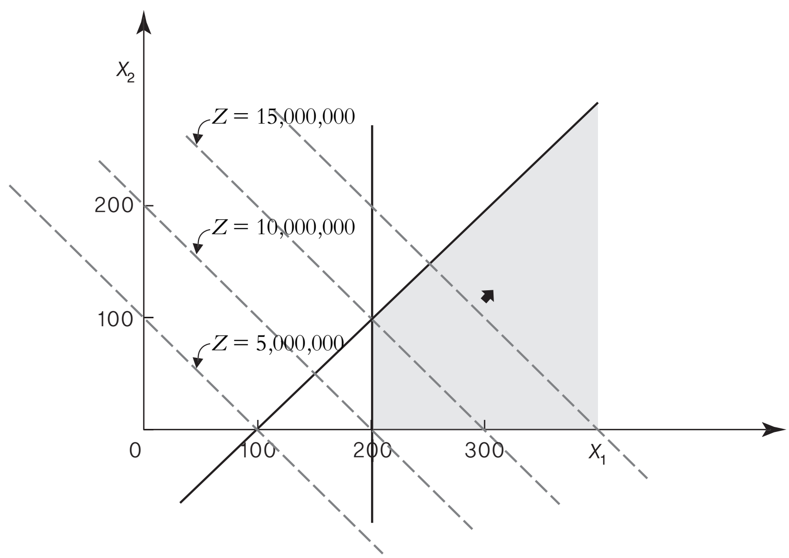
주식회사 백두의 최적 생산믹스를 위한 선형계획모형과 실행가능영역은 그림 3.7과 같다.

$$\begin{aligned} &Max. \quad && Z = 5X_1 + 5X_2 \\ &s.t. && X_1 \qquad\quad \geq 200 \\ &&& X_1 - X_2 \geq 100 \\ &&& X_1, X_2 \quad \geq 0 \end{aligned}$$

X_1 : 슈퍼용 냉장고 수

X_2 : 가정용 냉장고 수

그림 3.7 실행가능영역



주식회사 백두의 생산믹스 문제의 실행가능영역이 한 방향으로 열려 있다. 그러므로 등이익선을 화살표 방향으로 무한하게 이동시킬 수 있으며 그 결과로 목적함수의 Z값도 무한대로 커진다. 이렇게 무한대로 커질 수 있는 해를 무한최적해(unbounded optimal solution)라 한다.

현실에 있어서 하나의 제품을 무한대로 생산할 수도 팔 수도 없으므로 이러한 무한해를 갖는 선형계획모형은 모형을 정의함에 있어서 필요한 제약식이 고려되지 않았음을 알 수 있다. 주어진 주식회사 백두의 생산믹스모형은 의욕이 과다하여 수요의 하한만을 고려하고 당연히 고려해야 할 수요의 상한이나 자원의 제약에 대한 고려가 전혀 없음을 알 수 있다.

다 실행불가능해 : 다음의 선형계획 문제를 보자. 정부는 소년소녀가장과 독거노인을 지원하되 가능하면 지원 대상을 최대로 하고자 계획하고 있다. 소년소녀가장은 세대당 30만 원, 독거노인은 세대당 20만 원을 지원하고자 하며 이를 위해 3,000만 원의 예산을 확보하고 있으며 주어진 예산은 소년소녀가장과 독거노인의 지원에 전액 지출되어야 한다. 고령화시대의 결과로 독거노인이 갈수록 늘어나는 추세를 감안하여 소년소녀가장은 65세대 이상, 독거노인은 소년소녀가장보다 더 많은 세대의 지원을 계획하고 있다. 최적 지원계획을 수립해 보자.

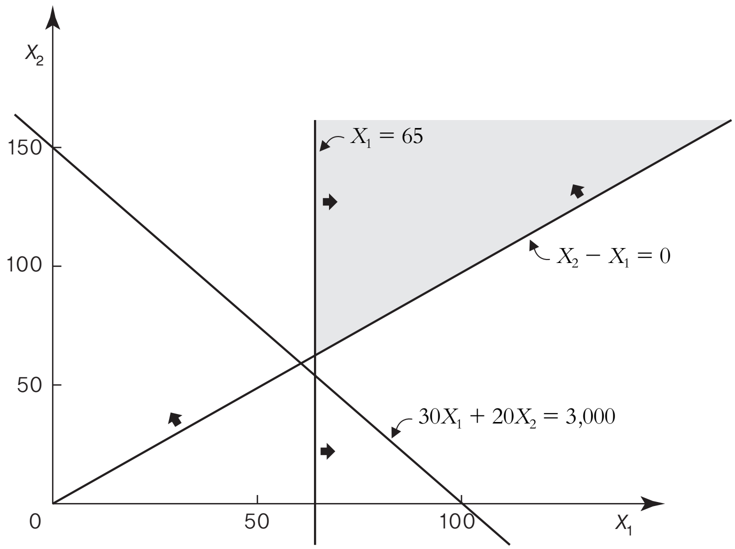
주어진 예산으로 지원세대를 최대화하기 위한 선형계획모형과 이의 그래프는 그림 3.8과 같다.

$$
\begin{array}{ll}
Max. & Z = X_1 + X_2 \\
s.t. & 30X_1 + 20X_2 = 3{,}000 \\
 & X_1 \qquad\quad \geq 65 \\
 & X_2 - X_1 \geq 0 \\
 & X_1, X_2 \quad \geq 0
\end{array}
$$

X_1 : 소년소녀가장 세대 수

X_2 : 독거노인 세대 수

그림 3.8 그래프



주어진 문제를 도해법으로 풀어 보면 실행가능영역이 존재하지 않음을 알 수 있다. 이렇게 선형계획모형의 실행가능영역이 존재하지 않는 경우 선형계획모형은 실행불가능해(infeasible solution)를 갖는다고 한다. 실행불가능해를 갖는다는 것은 주어진 문제가 현실적으로 실현이 불가능하거나 또는 목적함수나 제약식을 설정하는 데 잘못이 있음을 의미한다. 예로 제시된 모형에 있어서는 예산을 고려하지 않고 너무 의욕적으로 지원 대상을 확대하려는 목표를 설정하였기 때문이다. 이러한 경우에는 소년소녀가장과 독거노인을 지원하고자 하는 목표를 예산에 맞추어 현실적으로 지원이 가능하도록 낮추거나 또는 예산을 증액시켜야 할 것이나 국가 예산의 우선순위에 대한 고려가 필요하다. 그러나 소년소녀가장이나 독거노인이 경제적·사회적으로 독자적인 생존능력이 없고 절대빈곤층으로 절대적인 생계유지가 곤란한 경우에는 추가적인 예산배정에 대한 심각한 배려가 필요할 것이다.

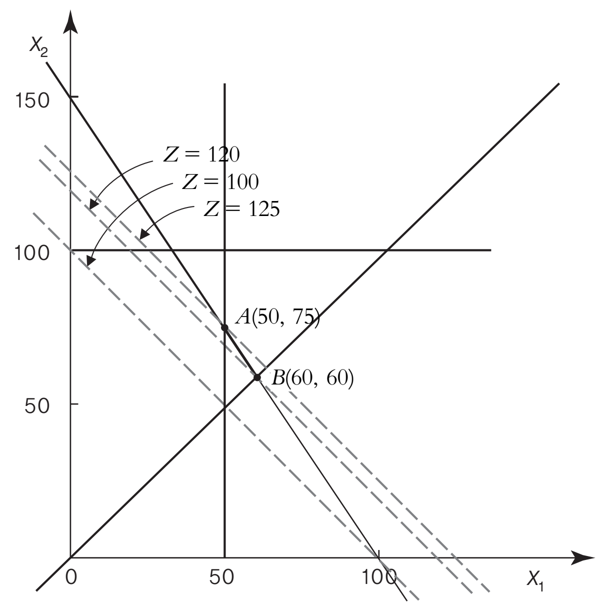
2) 등식의 제약식

우리는 앞의 예에서 책정된 예산을 소년소녀가장과 독거노인에 모두 지출해야 하며 그 결과로 예산제약식에 있어서 제약식이 등식으로 성립하였다. 정부가 예산의 증액이 여의치 않음을 알고 최소 65세대 이상의 소년소녀가장을 지원하려던 사업계획을 수정하여 50세대 이상으로 하향 조정하였다면 수정된 선형계획모형은 아래와 같다.

$$
\begin{aligned}
\textit{Max.} \quad & Z = X_1 + X_2 \\
\textit{s.t.} \quad & 30X_1 + 20X_2 = 3{,}000 \\
& X_1 \geq 50 \\
& X_2 - X_1 \geq 0 \\
& X_1,\ X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

이렇게 등식의 제약식이 존재하는 경우에는 그림 3.9에서 알 수 있는 바와 같이 실행가

그림 3.9 최적해



능영역이 지금까지와 같이 면적이 아니라 두 점 $A(50, 75)$와 $B(60, 60)$ 사이의 선분위에 정의된다. 그러므로 제약식이 등식으로 성립하는 경우에는 만약 최적해가 존재한다면 최적해는 등식의 제약식에 의하여 정의되는 직선 위에 존재하게 된다. 최적해 $(X_1^*, X_2^*) = (50, 75)$, $Z^* = 125$세대이다.

등식의 제약식은 2개의 부등식으로 정의될 수 있다. 예를 들어 $30X_1 + 20X_2 = 3{,}000$은 다음의 2개의 부등식으로 정의되며 등식은 두 부등식에 있어서 공통으로 존재하는 영역이다.

$$30X_1 + 20X_2 \leq 3{,}000$$
$$30X_1 + 20X_2 \geq 3{,}000$$

3) 제한이 없는 변수

비음제약이 없이 음수, 양수 모든 값을 취할 수 있는 변수를 제한이 없는(unrestricted) 변수라고 이름 하자. 제한이 없는 변수는 비음제약이 있는 2개의 변수로 치환하여 선형계획모형의 최적화 해법을 적용할 수 있다. 만약 변수 X_1이 제한이 없는 변수라고 하면 변수 X_1은 다음과 같이 비음조건이 있는 2개의 변수의 차로 새로이 정의한다.

$$X_1 = X_1^+ - X_1^-, \quad X_1^+, X_1^- \geq 0$$

예로 다음의 선형계획모형을 보자.

$$\begin{aligned} Max. \quad & Z = X_1 - X_2 \\ s.t. \quad & 2X_1 + X_2 \leq 4 \\ & X_1 - 2X_2 \leq 2 \\ & X_1 \geq 0 \end{aligned}$$

주어진 문제에서 변수 X_2는 비음조건이나 음수라는 제약식이 없으므로 제한이 없는 변수이며 2개의 변수로 다음과 같이 놓는다.

$$X_2 = X_2^+ - X_2^-, \quad X_1^+, X_2^- \geq 0$$

그러므로 선형계획모형은 다음과 같이 다시 모형화된다.

$$\begin{aligned} &Max. && Z = X_1 - X_2^+ + X_2^- \\ &s.t. && 2X_1 + X_2^+ - X_2^- \le 4 \\ & && X_1 - 2X_2^+ + 2X_2^- \le 2 \\ & && X_1,\ X_2^+,\ X_2^- \ge 0 \end{aligned}$$

이해를 위해 두 제약식을 정규형으로 치환하고 열벡터를 활용, 선형결합으로 표현하면 다음과 같다.

$$X_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + X_2^+\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + X_2^-\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + s_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

주어진 선형결합으로부터 제한이 없는 변수에 의하여 새로이 정의된 두 변수에 대하여 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$이 성립됨을 알 수 있으며, 그 결과로 두 벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$과 $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$은 선형종속이 되어 2차원의 공간에서 두 벡터가 함께 기저를 형성할 수 없고 두 변수 X_2^+와 X_2^-도 함께 기저변수가 될 수 없다. 그러므로 선형계획모형의 해에서 변수 $X_2^+ > 0$이면 $X_2^- = 0$이고 $X_2 > 0$임을 의미하고, $X_2^- > 0$이면 $X_2^+ = 0$이 $X_2 < 0$임을 의미하며, $X_2^+ = X_2^- = 0$이면 $X_2 = 0$이다.

4) 최대화와 최소화

최대화문제는 목적함수의 Z값에 $-$를 붙임으로써 최소화문제로 변형될 수 있다. 예를 들면 제약식이 같다면 다음의 두 목적함수는 동일한 최적해를 갖는다.

$$Max. \quad Z = X_1 - X_2 \quad \Leftrightarrow \quad Min. \quad -Z = -X_1 + X_2$$

보충문제

1 다음에 주어진 3개의 벡터가 선형독립인지 선형종속인지 판명하시오.

1) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

해

1) $-2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

그러므로 선형독립이 아니고 선형종속이다.

2) $3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

그러므로 선형독립이 아니고 선형종속이다.

2 *OK*목장은 자본금 5,000만 원으로 말 사육지와 소 사육지를 위한 목장을 새로이 개발하는데 말 사육지는 최소 300m^2, 소 사육지는 최소한 200m^2 이상 필요하다. m^{2}당 구입단가는 말 사육지는 10만 원, 소 사육지는 20만 원이다.

1) 총면적을 최대로 하는 선형계획모형을 작성하시오.

2) 도해법으로 최적해를 구하시오.

해

1) X_1 : 말 사육지 면적(단위 : m^2)

X_2 : 소 사육지 면적(단위 : m^2)

$$
\begin{aligned}
Max.\quad & X_1 + X_2 \\
s.t.\quad & X_1 \geq 300 \\
& X_2 \geq 200 \\
& 10X_1 + 20X_2 \leq 5{,}000
\end{aligned}
$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

2) 그림 3.10을 참조한다.

그러므로 주어진 선형계획모형은 실행불가능해를 갖는다.

3 철수가 즐기는 음식과 매일 요구되는 영양분은 다음과 같다.

1) 주어진 영양소를 만족시키는 최소비용 식단을 구성하는 선형계획모형을 정식화하시오.

2) 도해법으로 최적해를 구하시오.

3) 속박제약식과 비속박제약식을 구분하시오.

음식 / 영양소	생선(마리)	채소(근)	소요량/일
단백질(g)	3	1	45
비타민(mg)	2	4	100
철분(mg)	1	1	20
비용(천 원)	20	30	

해

1) X_1 : 하루 공급된 생선의 양(단위 : 마리)

그림 3.10 최적해

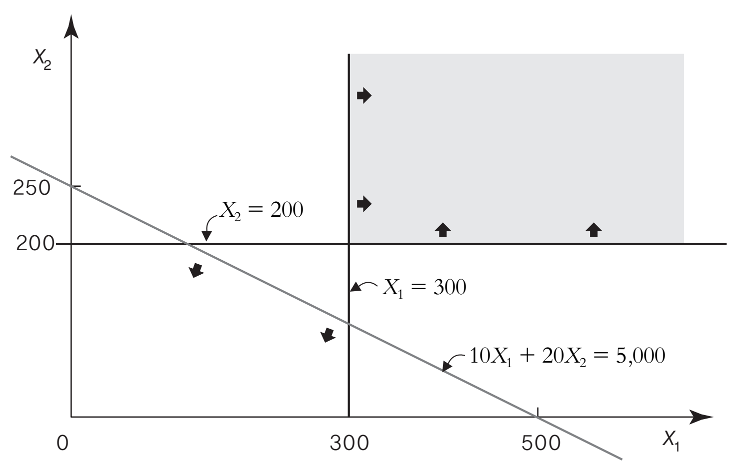
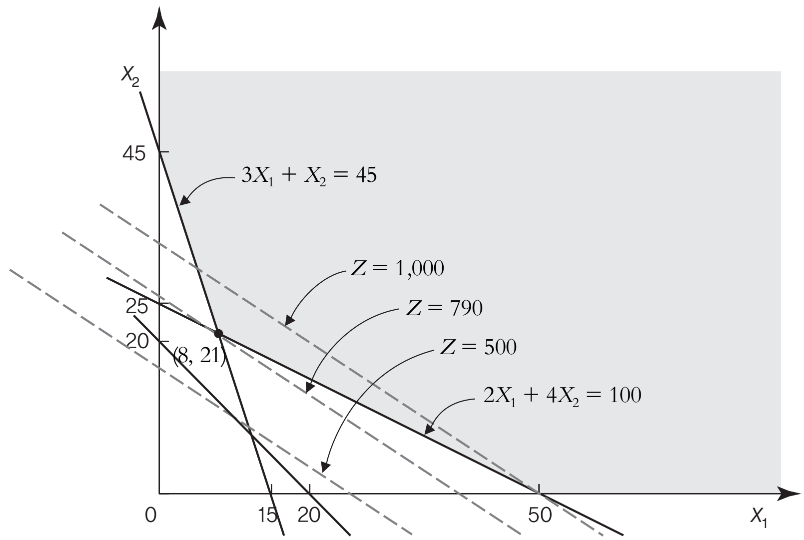


그림 3.11 최적해



X_2 : 하루 공급된 채소의 양(단위 : 근)

$$\begin{aligned} &Min. && 20X_1 + 30X_2 \\ &s.t. && 3X_1 + X_2 \geq 45 \\ & && 2X_1 + 4X_2 \geq 100 \\ & && X_1 + X_2 \geq 20 \\ & && X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2) 그림 3.11을 참조한다.

$3X_1 + X_2 = 45$, $2X_1 + 4X_2 = 100$으로부터 $X_1^* = 8$, $X_2^* = 21$, $Z^* = 790$이 된다.

3) 최적해에서 단백질과 비타민의 제약식은 속박제약식이고 철분의 제약식은 비속박 제약식이다.

4 다음과 같은 선형계획모형이 있다.

$$\begin{aligned} &Max. && 2X_1 + 3X_2 \\ &s.t. && X_1 + 4X_2 \geq 20 \end{aligned}$$

$2X_1 + X_2 \leq 10$

$X_1, X_2 \geq 0$

1) 주어진 선형계획모형의 정규형을 적으시오. 새로이 도입되는 변수의 이름을 명시하시오.
2) 만약 변수 X_2가 제한이 없는 변수라면 주어진 변수를 비음조건을 만족시키는 형태로 새로이 정의하고 선형계획모형도 수정하시오.

해

1) $Max.\quad 2X_1 + 3X_2$

$s.t.\quad X_1 + 4X_2 - s_1 + a_1 = 20$

$2X_1 + X_2 + s_2 = 10$

$X_1, X_2, s_1, s_2, a_1 \geq 0$

여기에서 s_1은 잉여변수, s_2는 여유변수, a_1은 인위변수이다.

2) $X_2 = X_2^+ - X_2^-$로 놓는다.

$Max.\quad 2X_1 + 3(X_2^+ - X_2^-)$

$s.t.\quad X_1 + 4(X_2^+ - X_2^-) \geq 20$

$2X_1 + (X_2^+ - X_2^-) \leq 10$

$X_1, X_2^+, X_2^- \geq 0$

5 다음 선형계획모형에서 제한이 없는 변수 X_2를 비음제약을 만족시키는 2개의 변수로 표현하여 다시 정식화하시오.

$Max.\quad X_1 + 3X_2$

$s.t.\quad X_1 - 2X_2 \leq 8$

$2X_1 + X_2 \geq 2$

$X_1 \geq 0$

해

$X_2 = X_2^+ - X_2^-$로 놓으면

$Max.\quad X_1 + 3X_2^+ - 3X_2^-$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & X_1 - 2X_2^+ + 2X_2^- \leq 8 \\
& 2X_1 + X_2^+ - X_2^- \geq 2 \\
& X_1,\ X_2^+,\ X_2^- \geq 0
\end{aligned}
$$

6 다음 선형계획모형을 심플렉스법을 이용하여 최적해를 구하시오.

$$
\begin{aligned}
Max. \quad & 2X_1 + 3X_2 \\
s.t. \quad & 2X_1 + X_2 \leq 4 \\
& X_1 + 2X_2 \leq 4 \\
& X_1,\ X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

해

해 0. (0, 0, 0)

$$
\begin{aligned}
& \qquad \Downarrow \\
& Z = 2X_1 + 3X_2 \\
& s_1 = 4 - 2X_1 - X_2 \qquad X_2 \leq 4 \\
\Leftarrow\ & s_2 = 4 - X_1 - 2X_2 \qquad X_2 \leq 2
\end{aligned}
$$

해 1. (0, 2, 6)

$$
\begin{aligned}
& Z = 2X_1 + 3\left[2 - \frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{2}s_2\right] = 6 + \overset{\Downarrow}{\frac{1}{2}X_1} - \frac{3}{2}s_2 \\
\Leftarrow\ & s_1 = 4 - 2X_1 - \left[2 - \frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{2}s_2\right] = 2 - \frac{3}{2}X_1 + \frac{1}{2}s_2 \qquad X_1 \leq \frac{4}{3} \\
& X_2 = 2 - \frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{2}s_2 \qquad X_1 \leq 4
\end{aligned}
$$

해 2. $\left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 6\frac{2}{3}\right]$: 최적해

$$
Z = 6 + \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3} - \frac{2}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2\right] = \frac{20}{6} - \frac{1}{3}s_1 - \frac{4}{3}s_2
$$

$$X_1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2$$

$$X_2 = 2 - \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{6}s_2\right] + \frac{1}{2}s_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_2$$

7 다음 선형계획모형을 심플렉스법을 이용하여 최적해를 구하시오.

$$\begin{aligned} &Max. && 2X_1 + X_2 \\ &s.t. && 3X_1 + X_2 \leq 10 \\ & && X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ & && X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

해 0. (0, 0, 0)

$\Downarrow$

$$Z = 2X_1 + X_2$$

$$\Leftarrow s_1 = 10 - 3X_1 - X_2 \qquad X_1 \leq \frac{10}{3}$$

$$s_2 = 8 - X_1 - 2X_2 \qquad X_1 \leq 8$$

해 1. $\left[\frac{10}{3}, \frac{14}{3}, \frac{20}{3}\right]$

$\Downarrow$

$$Z = 2\left[\frac{10}{3} - \frac{1}{3}X_2 - \frac{1}{3}s_1\right] - X_2 = \frac{20}{3} + \frac{1}{3}X_2 - \frac{2}{3}s_1$$

$$X_1 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}X_2 - \frac{1}{3}s_1 \qquad X_2 \leq 10$$

$$\Leftarrow s_2 = \frac{14}{3} - \frac{5}{3}X_2 + \frac{1}{3}s_1 \qquad X_2 \leq \frac{14}{5}$$

해 2. $\left[\frac{12}{5}, \frac{14}{5}, \frac{38}{5}\right]$: 최적해

$$Z = \frac{20}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{14}{5} + \frac{1}{5}s_1 - \frac{3}{5}s_2\right] = \frac{114}{15} - \frac{9}{15}s_1 - \frac{1}{5}s_2$$

$$X_1 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{14}{5} + \frac{1}{5}s_1 - \frac{3}{5}s_2\right] = \frac{36}{15} - \frac{6}{15}s_1 + \frac{1}{5}s_2$$

$$X_2 = \frac{14}{5} + \frac{1}{5}s_1 - \frac{3}{5}s_2$$